Signos filosóficos, núm. 7, enero-junio, 2002, 245-262

Teoremas limitativos de la lógica clásica de primer orden

*Yolanda Torres Falcón**
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Palabras clave: compacidad, metateoría, corrección, completud, definibilidad, semántica.

La lógica clásica de primer orden es una de las teorías lógicas contemporáneas más importantes por varias razones: se ha aplicado con gran éxito en la formalización de la mayoría de las teorías matemáticas, existen para ella cálculos completos y correctos (véase la sección 1), los lenguajes de primer orden son los más versátiles puesto que tienen suficiente capacidad expresiva para dar cuenta de una gran cantidad de inferencias correctas (es decir, tienen una buena teoría) y, al mismo tiempo, sus características sintácticas los hacen muy manejables para hacer un análisis detallado de ellos y obtener teoremas muy útiles acerca de ellos (es decir, admiten una muy buena metateoría).

Muchos de los teoremas clásicos de la lógica clásica de primer orden pueden ser interpretados de dos maneras, generalmente opuestas: se pueden ver como riqueza de estructuras (modelos) o como pobreza en el poder expresivo del lenguaje. El objetivo de este artículo es estudiar tres teoremas clásicos de la lógica de primer orden: los teoremas de compacidad, de Löwenheim-Skolem y de Morley desde este último punto de vista. Explicaré que interpretar de esta manera a estos teoremas no sólo hace más comprensible la introducción de nuevos conceptos y la

* ytf@xanum.uam.mx

Recepción: 14/12/01 Aceptación: 08/12/02

pertinencia de ciertas preguntas metateóricas, sino que además sirve para apreciar en toda su potencia uno de los aspectos más importantes de los lenguajes de primer orden, a saber, que representan el justo medio entre una teoría muy rica y una metateoría espléndida que permite solucionar, en buena medida, sus limitaciones expresivas.

La estructura de este artículo es la siguiente: en la primera sección se definen los lenguajes de primer orden, la clase de estructuras adecuadas para ellos y la noción de verdad de Tarski, se analizan los enfoques sintáctico y semántico para la lógica y se discuten brevemente los metateoremas de corrección y completud para esta lógica. En la segunda se comentan algunos resultados que son los que generalmente se plantean como resultados limitativos para la lógica de primer orden, y que sí lo son, pero pensando en la lógica sintácticamente. En la tercera, se discute el problema de la definibilidad de una clase de estructuras. La cuarta se dedica al teorema de compacidad, se ve cómo puede ser interpretado como un teorema que expresa una limitación expresiva de los lenguajes de primer orden. La quinta sección está dedicada al teorema de Löwenheim-Skolem. En la sexta, se analizan posibles soluciones sintácticas (es decir, considerando lenguajes distintos a los de primer orden) para subsanar las deficiencias expresivas de los lenguajes de primer orden. La siguiente sección está dedicada al teorema de Morley. Por último, se da un panorama de los últimos avances de la teoría de modelos y algunos problemas por resolver, siempre desde este punto de vista de usar herramientas y conceptos metateóricos para suplir las deficiencias del lenguaje.

§1. Lenguajes de primer orden

Los lenguajes de primer orden son lenguajes formales para hablar acerca de los objetos de un dominio dado. Este dominio es un conjunto no vacío y puede variar, no está fijo de antemano. Hablar de los objetos del dominio significa afirmar o negar que tengan ciertas propiedades o que estén o no estén en determinadas relaciones entre ellos. Para la predicación de propiedades se utilizan predicados con un número finito de argumentos (la aridad del predicado), para nombrar a los elementos del dominio se utilizan las constantes individuales, los símbolos funcionales, también con aridad finita, representan funciones en el dominio (estos símbolos son necesarios cuando se trata de axiomatizar teorías matemáticas). Generalmente se distingue un predicado binario para representar a la relación de igualdad, aunque no es estrictamente necesario; los lenguajes que lo tienen son los llamados lenguajes de primer orden con igualdad. Más específicamente, un lenguaje de primer orden con igualdad consta de los siguientes símbolos:

1. Un conjunto a lo más numerable $\{P_1, \ldots, P_n, \ldots\}$ de predicados de aridad finita.
2. Un conjunto a lo más numerable $\{f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$ de símbolos funcionales de aridad finita.
3. Un conjunto a lo más numerable $\{c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ de constantes individuales.
4. Un símbolo de igualdad: =.
5. Un conjunto infinito numerable $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ de variables individuales.
6. Conectivos lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
7. Cuantificadores: $\forall, \exists$.
8. Símbolos de puntuación: (,).

Éste es el esquema general de un lenguaje de primer orden con igualdad. Los primeros tres grupos de símbolos son los llamados símbolos no lógicos y varían de lenguaje a lenguaje, pueden incluso ser vacíos. El símbolo de la igualdad siempre está presente y siempre debe ser interpretado como la relación de igualdad entre los elementos del conjunto. Los últimos cuatro grupos de símbolos son los llamados símbolos lógicos y están presentes en cualquier lenguaje de primer orden. Es posible tener conjuntos infinitos no numerables de predicados, símbolos funcionales y constantes individuales, pero en lo que sigue siempre supondremos que el conjunto de todos los símbolos de cualquier lenguaje es numerable. Esto no afecta la generalidad de las afirmaciones, sólo simplifica los enunciados de algunos teoremas, como el de Löwenheim-Skolem.

Las reglas de formación para los lenguajes de primer orden se dan de manera recursiva en dos etapas: primero, se definen los términos, que son las expresiones del lenguaje formal que denotan individuos del dominio y, posteriormente, se definen las fórmulas bien formadas, que son las expresiones del lenguaje formal que denotan proposiciones acerca de los individuos del dominio. Es importante señalar que hay dos tipos de fórmulas: aquellas que tienen variables libres, es decir, variables que no están afectadas por ningún cuantificador (fórmulas abiertas) y aquellas cuyas variables están todas ligadas por algún cuantificador (enunciados o fórmulas cerradas).

Cada lenguaje de primer orden determina a la clase de todas las estructuras adecuadas para ese lenguaje. Si *L* es un lenguaje de primer orden, una estructura A adecuada para *L* (también llamada *L*-estructura), consta de un conjunto no vacío A, que se denomina el dominio o universo de la estructura. Cada símbolo no lógico de *L* debe tener un significado preciso en la estructura: cada constante individual deberá ser interpretada como un elemento del conjunto A, cada símbolo predicativo como una relación entre elementos de A de la aridad correspondiente y cada símbolo funcional como una función en A de la aridad correspondiente también.

Si A es una estructura adecuada para el lenguaje *L*, se puede definir de manera rigurosa lo que quiere decir que un enunciado de *L* sea verdadero en A. Esto se hace de manera recursiva y no daré aquí la definición formal. Conviene notar que una fórmula abierta no tiene un valor de verdad fijo en la estructura A, su valor de verdad depende del significado que se les asigne a las variables que aparecen libres en la fórmula, sin embargo, si la fórmula es un enunciado, tiene un valor de verdad fijo en cada *L*-estructura.

Cuando un enunciado es verdadero en una estructura, se dice que la estructura es un modelo del enunciado. Análogamente, si en una estructura son verdaderos todos los enunciados pertenecientes a un conjunto de enunciados dado, se dice que la estructura es modelo del conjunto de enunciados.

Con estos elementos se puede hacer un estudio semántico de la lógica. Se clasifica a los enunciados en universalmente válidos (verdaderos en todas las estructuras para *L*), contradictorios (falsos en todas las *L*-estructuras) y contingentes (que no son ni contradictorios ni universalmente válidos). También se estudia la relación de consecuencia lógica que se da entre un conjunto de fórmulas y una fórmula cuando la verdad de esta última se sigue de la verdad de las fórmulas del conjunto.

La noción de modelo permite definir de manera más concisa todas las nociones semánticas: un enunciado de *L* es universalmente válido si todas las *L*-estructuras son modelos de él, es contradictorio si no tiene modelos y es contingente si tanto él como su negación tienen modelos. La noción fundamental en lógica, la de consecuencia lógica, se define de la siguiente manera: un enunciado φ es consecuencia lógica de un conjunto de enunciados Σ si todo modelo de Σ es también un modelo de φ.

Otro enfoque para el estudio de la lógica de primer orden es el enfoque sintáctico. Se escogen ciertas fórmulas del lenguaje como axiomas, se especifican reglas de inferencia y se define rigurosamente lo que es una demostración. Se obtiene entonces una teoría formal axiomatizada. Un teorema de la teoría es una fórmula demostrable en la teoría. Cuando se trabaja sintácticamente, el concepto de verdad desaparece, lo importante es la demostrabilidad de ciertas fórmulas. El estudio de estas teorías lógicas fue un tema central de investigación durante mucho tiempo, cuando las consideraciones semánticas se hacían de manera intuitiva. Los metateoremas importantes, que unifican estos dos enfoques, son los llamados teoremas de corrección y completud. Estos dos teoremas garantizan la existencia de una teoría formal T tal que:

Teorema de corrección
Todos los teoremas de T son universalmente válidos.

Teorema de completud
Todas las fórmulas universalmente válidas son teoremas de T.

De hecho, hay muchas teorías que cumplen con estos dos teoremas, pero lo importante es que exista una, porque esto quiere decir que el concepto de verdad lógica es equivalente al concepto de demostrabilidad en T. Las verdades lógicas son precisamente los teoremas de T.

§2. Algunos teoremas limitativos

A raíz de la demostración del teorema de completud para la lógica de primer orden, lo natural era tratar de hacer algo parecido con la matemática, es decir, tratar de encontrar teorías formales cuyos teoremas fueran precisamente las verdades matemáticas. De lograrse, se tendría una demostración de que la matemática está libre de contradicciones, pues esto último se seguiría del teorema de corrección.

El teorema de Gödel acabó con las esperanzas de encontrar un sistema así para la aritmética al establecer que cualquier teoría axiomática consistente (es decir, en la cual no se puedan demostrar dos enunciados mutuamente contradictorios) en un lenguaje de primer orden adecuado para la teoría de números es esencialmente incompleta: siempre existirá un enunciado aritmético verdadero que no se puede demostrar en la teoría.

El teorema de Gödel es un clásico teorema limitativo: establece que no es lo mismo ser un teorema que ser verdadero.

Otro conocido teorema limitativo es el de independencia de la hipótesis del continuo de los axiomas de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos. En este sistema axiomático, ni la hipótesis del continuo ni su negación son demostrables. Dicho de otro modo, este teorema establece que, basados en los axiomas usuales para la teoría de conjuntos, no se puede determinar cuántos puntos hay en una recta.

Estos teoremas establecen que ciertas fórmulas no son demostrables en ciertos sistemas y en este sentido son claramente limitativos: establecen límites a la noción de demostrabilidad en teorías de primer orden. En particular establecen que la noción de verdad en matemáticas no es recuperable mediante la noción de demostrabilidad en teorías axiomáticas formalizadas en lenguajes de primer orden.

§3. Definibilidad

El enfoque que se seguirá es estrictamente semántico. Vamos a ver que también hay teoremas clásicos que pueden ser interpretados como limitantes del poder expresivo de los lenguajes de primer orden. Fijemos un lenguaje de primer orden L. Dado un enunciado α de L, es natural estudiar el conjunto de estructuras que hacen verdadero al enunciado α, estas estructuras son los modelos de α y a la clase de estas estructuras se le denota $\mathrm{Mod}(\alpha)$. Análogamente, si Σ es un conjunto cualquiera de enunciados de L, $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ denota a la clase de todos los modelos de Σ, es decir, todas las estructuras adecuadas para L que hacen verdaderos a todos los enunciados de Σ.

Las preguntas naturales son las siguientes:

Dado un enunciado α (o un conjunto de enunciados Σ), ¿cómo es $\mathrm{Mod}(\alpha)$ (o $\mathrm{Mod}(\Sigma)$)?

Dada K una clase L-estructuras, ¿existe algún enunciado α tal que $K=\mathrm{Mod}(\alpha)$?¿Existe un conjunto de enunciados Σ tal que $K=\mathrm{Mod}(\Sigma)$?

Esta última pregunta es el llamado problema de la definibilidad de una clase de estructuras. Si la respuesta a la primera pregunta es afirmativa, entonces se dice que la clase K es una clase básica elemental. Si la respuesta a la segunda pregunta es afirmativa, entonces se dice que la clase K es una clase elemental o elemental en sentido amplio.

Claramente ser una clase básica elemental es una muy buena propiedad, pues quiere decir que las estructuras de la clase comparten una propiedad, sólo ellas, y que esa propiedad es expresable por medio de una sola fórmula del lenguaje.

Cuando la clase es simplemente elemental, se necesita un conjunto infinito de fórmulas del lenguaje para expresar la propiedad que tienen en común las estructuras de la clase, pues si el conjunto es finito se puede tomar la conjunción de todas las fórmulas del conjunto y se obtiene una única fórmula del lenguaje. Las clases elementales también son muy buenas: pueden ser vistas como los modelos de teorías con una infinidad de axiomas y por eso se puede trabajar con ellas casi de la misma manera que con las básicas. Sin embargo, algunas propiedades de las clases básicas elementales no son válidas para las clases elementales, como por ejemplo el hecho de que el complemento (con respecto a la familia de las *L*-estructuras) de una clase básica elemental es también una clase básica elemental.

Desafortunadamente hay clases que no son elementales, es decir, ni con un conjunto infinito de fórmulas se puede expresar la propiedad que tienen en común. Esto quiere decir que el poder expresivo del lenguaje no es suficiente para definir a la clase de estructuras. Cuando se demuestra que una clase de estructuras no es elemental se está estableciendo un teorema limitativo acerca del poder expresivo del lenguaje.

Reviso entonces algunos ejemplos de clases básicas elementales y de clases elementales. Consideraré el lenguaje más simple de todos los lenguajes de primer orden con igualdad, el lenguaje puro de la identidad, que tiene un único predicado binario, el símbolo de la igualdad.

Ejemplo 1. Sea α el enunciado $\forall x \forall y(x=y)$. Los modelos de este enunciado son todos los conjuntos unitarios, es decir, la clase de los conjuntos unitarios es básica elemental.

Ejemplo 2. Sea α el enunciado $\exists x \exists y \neg(x=y)$. Los modelos de este enunciado son todos los conjuntos con más de un elemento.

Ejemplo 3. Para todo número natural n, la clase de todos los conjuntos de cardinalidad mayor o igual a n es básica elemental. En efecto, los conjuntos de cardinalidad mayor o igual a n son precisamente los modelos de la fórmula

$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$. Aquí estoy abusando un poco del lenguaje al escribir ‘$x \neq y$’ en vez de ‘$\neg(x=y)$’. La fórmula que define a los conjuntos de cardinalidad mayor o igual a n será denotada en lo que sigue por $\sigma(n)$.

Ejemplo 4. Para todo número positivo natural n, la clase de todos los conjuntos con n elementos exactamente es básica elemental, pues un conjunto tiene exactamente n elementos si y sólo si es modelo de la fórmula $\sigma(n) \wedge \neg\sigma(n+1)$. Esta fórmula se abrevia como $\exists!n$.

Ejemplo 5. La clase de todos los conjuntos infinitos es una clase elemental, pero no básica, porque se necesita un conjunto infinito de fórmulas para caracterizarla. Si se considera el conjunto $\Sigma = \{\sigma(n): n=1, 2, \ldots\}$, es claro que un conjunto es modelo de Σ si y sólo si tiene cardinalidad mayor o igual a n para todo número natural n, esto es, si y sólo si es infinito.

Es natural preguntarse si la clase de los conjuntos finitos es básica elemental o elemental, pero antes de contestar esta pregunta necesitamos hablar acerca del teorema de compacidad.

§4. El teorema de compacidad

Sea *L* un lenguaje arbitrario de primer orden. El teorema de compacidad dice lo siguiente:

Teorema (Compacidad)
Sea T un conjunto de enunciados de *L* y supongamos que todos sus subconjuntos finitos tienen modelos, entonces T tiene un modelo.

Este teorema se puede formular de manera equivalente así:

Teorema (Finitud)
Supongamos que una fórmula de *L* es consecuencia lógica de un conjunto T de fórmulas de *L*. Entonces existe un subconjunto finito S de T tal que la fórmula es consecuencia lógica de S.

Estos dos teoremas son equivalentes, suponiendo el de compacidad se puede demostrar el de finitud y viceversa, por eso a cualquiera de las dos versiones se le conoce como teorema de compacidad. Un comentario breve acerca del nombre: claramente tiene mucho más sentido llamarlo teorema de finitud, pero el nombre de compacidad se debe a que este teorema es equivalente a que un cierto espacio topológico asociado a las fórmulas del lenguaje sea compacto.

La importancia del teorema de compacidad para la lógica de primer orden no puede ser enfatizada suficientemente. Claramente expresa algo muy deseable en lógica: que los argumentos son esencialmente finitos y, si existiera un argumento correcto con un número infinito de premisas, el teorema de compacidad asegura que dentro de ese conjunto se puede escoger un conjunto finito de premisas que garantiza la conclusión.

Una de las aplicaciones más importantes de este teorema es en la construcción de modelos: basta verificar que cada subconjunto finito de un conjunto dado de enunciados tiene un modelo para poder garantizar la existencia de un modelo para todo el conjunto. También es muy útil para demostrar la consistencia de teorías con conjuntos infinitos de axiomas: en virtud de los teoremas de completud y corrección para la lógica de primer orden, para verificar que de un conjunto infinito de axiomas no se pueden deducir contradicciones basta comprobar que cada subconjunto finito de axiomas tiene modelo.

Con ayuda de este teorema se demostrará que la clase de todos los conjuntos finitos no es elemental, es decir, no existe ningún conjunto de enunciados en ningún lenguaje de primer orden tal que sus modelos sean precisamente los conjuntos finitos.

Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que, en algún lenguaje de primer orden, se puede encontrar un conjunto de enunciados, digamos T, cuyos modelos son precisamente los conjuntos finitos. Agreguemos a T el conjunto de enunciados $\{\sigma(n)\text{: } n=1, 2, ...\}$ para obtener un nuevo conjunto, llamémosle T'. Si S es cualquier subconjunto finito de T', claramente S tiene un modelo, pues al ser finito, sólo aparece en S un conjunto finito de los enunciados que fueron agregados. Por lo tanto hay un número máximo n que aparece en ellos y cualquier conjunto finito con más de n elementos será modelo de S. Hemos visto que todo subconjunto finito de T' tiene modelo. Aplicando el teorema de compacidad concluyo que T' tiene modelo. Pero ese modelo debe ser infinito y además debe ser modelo de T. Esto contradice la hipótesis de que los modelos de T son precisamente los conjuntos finitos.

Notemos que este resultado implica que la clase de los conjuntos infinitos no es básica elemental, pues si fuera definible por medio de algún enunciado, entonces su complemento, que es la clase de los conjuntos finitos, estaría definida por la negación de ese enunciado

El elemento crucial en la demostración es el teorema de compacidad y es fácil convencerse de que cualquier lógica (con igualdad) para la cual valga el teorema de compacidad es incapaz de expresar el concepto de finitud. Es en este sentido que se puede leer al teorema de compacidad como un teorema limitativo para la lógica de primer orden: el teorema de compacidad afirma que el concepto de finitud no se puede expresar, ni siquiera con un conjunto infinito de enunciados, en ningún lenguaje de primer orden.

El teorema de compacidad es de tal importancia que su eliminación no es opción, por lo tanto tendremos que vivir con el hecho de no poder expresar el concepto de ser finito, aunque sí es expresable el concepto de tener cardinalidad n para un número *n* fijo.

§5. El teorema de Löwenheim-Skolem

Se ha visto que la propiedad de tener exactamente n elementos es expresable en los lenguajes de primer orden para cualquier número entero positivo n. La propiedad de ser infinito también es expresable en lenguajes de primer orden, aunque se necesite un conjunto infinito de enunciados para hacerlo. La pregunta natural siguiente es si será posible expresar, para cada cardinal infinito κ, la propiedad de tener cardinalidad κ.

En la respuesta a esta pregunta interviene el teorema de Löwenheim-Skolem, que afirma lo siguiente:

Teorema (Löwenheim-Skolem)

Sea T un conjunto de enunciados de un lenguaje arbitrario de primer orden. Si T tiene un modelo infinito, entonces T tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita.

Esta manera de enunciar el teorema de Löwenheim-Skolem es válida para lenguajes de primer orden numerables, que son los que estoy considerando aquí. Generalmente, el teorema de Löwenheim-Skolem se enuncia en dos partes: una ascendente, que garantiza la existencia de modelos de cardinales infinitos grandes, y otra descendente, que garantiza la existencia de modelos de la cardinalidad del lenguaje.

Es claro que este teorema implica una respuesta negativa a la pregunta que planteé al inicio de esta sección, pues si existiera un conjunto de enunciados T cuyos modelos fueran precisamente los conjuntos de cardinalidad κ para algún κ infinito, T tendría modelos infinitos y, por el teorema de Löwenheim-Skolem, tendría modelos de cualquier cardinalidad infinita, no sólo de cardinalidad κ.

En vista de esto, el teorema de Löwenheim-Skolem también puede ser leído como un teorema limitativo para la capacidad de expresión de los lenguajes de primer orden, pues implica que ciertas clases de estructuras no son definibles por medio de lenguajes de primer orden. De hecho, tiene consecuencias poco intuitivas que reflejan de manera aguda hasta qué punto están limitados los lenguajes de primer orden: consideremos al conjunto R de los números reales con la relación de orden, la suma, el producto y dos elementos distinguidos, el 0 y el 1. Definamos a T como el conjunto de los enunciados verdaderos para esta estructura en un lenguaje de primer orden adecuado, es decir, con un predicado binario, dos símbolos funcionales también binarios y dos constantes. El teorema de Löwenheim-Skolem afirma que T tiene un modelo numerable, esto es, hay una estructura numerable que hace verdaderos exactamente a los mismos enunciados que el conjunto de los números reales como campo ordenado.

Aquí es fácil identificar qué les falta a los lenguajes de primer orden para poder caracterizar a los números reales. La propiedad esencial de estos últimos es la de completud y este hecho se expresa diciendo que todo subconjunto de R acotado superiormente tiene una cota superior mínima. En los lenguajes de primer orden no se puede cuantificar sobre subconjuntos del dominio, sólo sobre elementos de éste. La opción de modificar la sintaxis de los lenguajes de primer orden para poder cuantificar sobre subconjuntos del dominio ha sido considerada, los lenguajes obtenidos son los llamados lenguajes de orden superior, que se mencionan en el siguiente apartado.

§6. Soluciones posibles

Aunque estrictamente hablando no es un problema el que ciertos conceptos no sean expresables por medio de conjuntos de enunciados de lenguajes de primer orden, es deseable tener la mayor capacidad expresiva posible. Para tratar de mejorar la situación se pueden adoptar dos enfoques, como siempre en lógica: el sintáctico y el semántico.

El enfoque sintáctico considera lenguajes distintos a los de primer orden que tengan mayor capacidad expresiva. Los dos tipos principales son los lenguajes infinitarios y los lenguajes de orden superior.

Los lenguajes infinitarios tienen las mismas reglas de formación que los lenguajes de segundo orden, con la salvedad de que se aceptan conjunciones y disyunciones infinitas y también hileras infinitas de cuantificadores. Más específicamente, si L es un lenguaje de primer orden, α y β son dos cardinales infinitos, el lenguaje $L\alpha\beta$ es un lenguaje con los mismos símbolos que L (predicados, símbolos funcionales, constantes, el símbolo de la igualdad, variables, conectivos y cuantificadores) y con las mismas reglas de formación, pero tiene dos reglas de formación más: son fórmulas bien formadas las disyunciones y conjunciones de menos de α fórmulas y se admiten sucesiones de menos de β variables cuantificadas.

El lenguaje L es un caso particular de lenguajes infinitarios: cuando tanto α como β son iguales a ω, el primer cardinal infinito. Claramente el concepto de ser finito es expresable en $L\omega_1\omega$, simplemente se considera la disyunción del siguiente conjunto de fórmulas: $\{\exists! n : n=1, 2, ...\}$. Es una disyunción numerable de fórmulas y es, por lo tanto, una fórmula bien formada de $L\omega_1\omega$. Además un conjunto es modelo de esta fórmula si y sólo si tiene cardinalidad n para algún entero positivo n, es decir, si y sólo si es finito.

La clase de los conjuntos finitos es, pues, básica elemental para los lenguajes infinitarios, de hecho lo es para el lenguaje infinitario más simple que hay, a saber, $L\omega_1\omega$. Pero hay varios problemas con los lenguajes infinitarios: el teorema de compacidad no es válido para ellos (claramente, de otro modo no sería definible la clase de los conjuntos finitos); además, no existen para ellos cálculos completos y correctos, es decir, no existen teorías para ellos de tal modo que la consecuencia lógica y la demostrabilidad coincidan.

Otra opción sintáctica la constituyen los lenguajes de orden superior. En estos lenguajes hay variables de distintos tipos. Unas varían sobre los elementos del dominio, otras acerca de subconjuntos del dominio o sobre propiedades y relaciones entre los elementos del dominio. Se puede cuantificar sobre todas las variables y, como consecuencia, la riqueza expresiva de estos lenguajes es mucho mayor que la de los lenguajes de primer orden. Se puede caracterizar *tener la cardinalidad del continuo* y *ser un orden isomorfo al orden de los números reales*. Tanto el concepto de finitud como el de infinitud son expresables por medio de un solo enunciado de orden superior, así que claramente tienen una capacidad expresiva mucho mayor que la de los lenguajes de primer orden. Sin embargo, desde el punto de vista metateórico tiene los mismos problemas que los lenguajes infinitarios, no valen ni el teorema de compacidad ni el de Löwenheim-Skolem. Tampoco existen cálculos correctos y completos para estos lenguajes.

La falta del teorema de compacidad y de la existencia de cálculos completos y correctos para estos tipos de lenguajes hacen que la metalógica para ellos sea muy difícil y muy pobre en comparación con la que se tiene para los lenguajes de primer orden. Los lenguajes de primer orden son los lenguajes más fuertes, expresivamente hablando, para los que se tienen los teoremas de corrección y completud. Antes de decidirse a cambiar a los lenguajes de primer orden por otros habría que analizar hasta dónde se puede llegar con ellos.

El enfoque semántico para resolver estos problemas de definibilidad consiste en, desde la metateoría, dar condiciones acerca de las teorías que permitan, por ejemplo, distinguir entre distintos cardinales infinitos.

Este enfoque no modifica los lenguajes ni la semántica para ellos. En otras palabras, aceptamos que, como consecuencia de los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem, los conceptos de finitud y de tener una cardinalidad infinita específica no se pueden expresar como conjuntos de fórmulas dentro del lenguaje. La alternativa es hacer un estudio metateórico acerca de conjuntos de enunciados (teorías) y sus modelos y encontrar condiciones que permitan distinguir entre cardinales infinitos distintos. Este enfoque es el que más frutos ha dado como motor para el desarrollo de la teoría de modelos y uno de los teoremas más profundos se comenta en el apartado siguiente.

§7. El teorema de Morley

Trabajemos con los lenguajes de primer orden semánticamente. Esto quiere decir que los axiomas y reglas de inferencia no nos interesan, pero sí los enunciados y sus modelos. Por eso se define una teoría como un conjunto de enunciados de un lenguaje de primer orden fijo L. Consideremos una teoría arbitraria que tenga modelos infinitos. Por el teorema de Löwenheim-Skolem, esta teoría tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita. ¿Cuál es la mejor situación posible, dado que no podemos tener modelos de una sola cardinalidad? Claramente no tener muchos modelos de la misma cardinalidad. De este modo surge, de manera muy natural, el concepto de la κ-categoricidad donde κ es cualquier cardinal infinito.

Una teoría T es κ-categórica o categórica en el cardinal κ, si tiene modelos infinitos y todos sus modelos de cardinalidad κ son isomorfos. Entonces una teoría κ-categórica tiene esencialmente un modelo (salvo isomorfismo) de cardinalidad κ.

Desde este punto de vista, la mejor teoría posible sería aquella que fuera κ-categórica para todo cardinal infinito κ. Y un estudio acerca del comportamiento de distintas teorías con respecto a la categoricidad podría servir para diferenciar a los distintos cardinales infinitos.

El teorema de Morley no sólo es sorprendente por lo que dice, sino que su demostración provee herramientas que han resultado ser esenciales para el desarrollo de la teoría de modelos posterior. Antes de enunciarlo es necesario aclarar que una teoría es completa si dado cualquier enunciado de su lenguaje, o él o su negación pertenecen a la teoría. Una teoría consistente y completa es, en cierto sentido, como una estructura, porque la teoría escoge, dado cualquier enunciado, entre él y su negación. Con la definición tan libre que tenemos de teoría, dado que no nos interesa tener un conjunto de axiomas del cual se deduzcan todos los teoremas, pedirle a una teoría que sea completa no es mucho; el lema de Lindenbaum garantiza que toda teoría consistente se puede extender a una teoría consistente y completa en el mismo lenguaje.

Teorema (Morley)

Toda teoría completa que sea categórica en algún cardinal no numerable, es categórica en cualquier cardinal no numerable.

De acuerdo al teorema de Morley las teorías completas se pueden clasificar en cuatro clases: aquellas que no son categóricas en ningún cardinal, las que son categóricas en ω pero no son categóricas en ningún cardinal no numerable, las que son categóricas en todo cardinal no numerable, pero no en ω y, por último, las que son categóricas en todo cardinal infinito.

Es obvio que el teorema de Morley nos ofrece mucho mayor sutileza de análisis que la que se tenía anteriormente, pues desde el punto de vista de tener modelos, si una teoría tiene modelos infinitos, tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita, no hay diferencias entre ellos. Sin embargo, pensando en categoricidad, ya se pueden distinguir a los cardinales no numerables del cardinal numerable ω.

A pesar de que el teorema de Morley nos ofrece la posibilidad de distinguir entre cardinales infinitos distintos, aunque sea desde la metateoría, también puede ser leído como un teorema limitativo acerca del poder expresivo de los lenguajes de primer orden, porque lo que dice esencialmente es que si una teoría es categórica en algún cardinal no numerable, la razón de su categoricidad está no tanto en el cardinal en sí, sino en el hecho de que no sea numerable, pues los lenguajes no pueden *distinguir* entre los distintos tipos de no-numerabilidad. Esto se puede ver prácticamente analizando las demostraciones que se dan para probar que ciertas teorías son categóricas en algún cardinal no numerable; la demostración que sirve para un cardinal no numerable, servirá, con modificaciones obvias, para cualquier otro cardinal no numerable.

El trabajo de Morley, junto con todos los conceptos derivados de él, ha resultado ser de lo más fructífero para el desarrollo de la teoría de modelos actual, como se verá en el siguiente apartado.

§8. Nuevos problemas

Siguiendo exactamente la misma línea de pensamiento que llevó a la introducción del concepto de categoricidad, podríamos tratar de hacer un análisis más sutil de las teorías no categóricas preguntándonos ahora lo siguiente acerca de *grados de no-categoricidad*. Si una teoría no es categórica en algún cardinal infinito, entonces tiene varios modelos de esa cardinalidad no isomorfos. Ahora se quiere encontrar alguna propiedad de teorías de tal modo que se distinga entre una teoría que tenga un número finito de modelos no isomorfos y otra que tenga un número infinito de modelos no isomorfos. Incluso se pueden hacer distinciones entre distintas cardinalidades infinitas; no es lo mismo que una teoría tenga tres modelos no isomorfos, a que tenga ω modelos no isomorfos o a que tenga un conjunto de modelos no isomorfos de la cardinalidad del continuo.

Ésta es, a mi juicio, una de las partes más excitantes de la teoría de modelos actualmente. Es el llamado problema del espectro y puede formularse de la siguiente manera:

Dada una teoría completa T formulada en un lenguaje de primer orden numerable, se puede definir, para cada cardinal infinito α, $I(T,\alpha)$ como el número de modelos de T de cardinalidad de cardinalidad α. Si la teoría T queda fija $f(\alpha)= I(T,\alpha)$ define una función (o, estrictamente hablando, un funcional) cuyo dominio es la clase de los cardinales infinitos. El problema del espectro es la pregunta acerca de qué funciones son posibles.

Se tienen resultados parciales con respecto a este problema, por ejemplo, se sabe que para todo cardinal infinito α y para toda teoría completa T, $I(T,\alpha)\leq 2^{\alpha}$. El teorema de Morley puede ser enunciado en este contexto de la siguiente manera:

Teorema (Morley)

Si $I(T,\alpha)=1$ para algún cardinal α no numerable, entonces $I(T,\alpha)=1$ para todo cardinal α no numerable.

Un resultado muy sugerente es el siguiente de Robert Vaught:

Teorema (Vaught)

Para toda teoría completa T, $I(T,\omega)\neq 2$.

Este teorema afirma que ninguna teoría completa puede tener exactamente dos modelos numerables no isomorfos. Sabemos que hay teorías completas con, exactamente, tres modelos numerables no isomorfos, por ejemplo la teoría del orden denso con algún extremo; también hay teorías completas con exactamente cuatro modelos numerables no isomorfos, por ejemplo la teoría del orden denso. ¡Y sin embargo no existen teorías con exactamente dos modelos numerables!

El comportamiento de una teoría en cardinales no numerables afecta su comportamiento en el caso numerable. Acabo de dar ejemplos de teorías que tienen 3 o 4 modelos numerables no isomorfos, pero esto no es posible si la teoría es categórica en algún y, por lo tanto todo, cardinal no numerable, como lo afirma el siguiente teorema:

Teorema (Lachlan y Baldwin)

Si $I(T,\omega_1)=1$, entonces $I(T,\omega)=\omega$ o $I(T,\omega)=1$.

Este teorema afirma que si una teoría es categórica en algún cardinal no numerable, entonces no se comporta demasiado mal en el caso numerable, o es categórica o tiene un conjunto numerable de modelos numerables no isomorfos.

Intentos por resolver el problema del espectro han llevado a los lógicos a hacer una clasificación de las fórmulas. Ya se había hecho una clasificación sintáctica: las fórmulas más simples son aquellas que no tienen cuantificadores, después aquellas que sólo tienen una cadena de cuantificadores iguales, ya sea universales o existenciales, son las fórmulas de tipo $\vee$ o de tipo $\exists$, después aquellas que tienen dos cadenas de cuantificadores distintos, son las de tipo $\vee\exists$ o de tipo $\exists\vee$, según el orden en el que aparecen las cadenas, etcétera. Esta clasificación determina el grado de complejidad de una cierta fórmula.

La nueva clasificación que surgió a partir del trabajo de Morley es una clasificación semántica: se analiza cuántas extensiones consistentes y completas tiene una fórmula y esto lleva a una clasificación de teorías en estables, inestables y superestables. A grandes rasgos, una teoría es estable si en sus modelos no aparecen muchos distintos tipos de elementos, es decir, hay poco rango de variación. Hacer un análisis detallado de esta clasificación va más allá de los propósitos de este artículo, pero es necesario hacer notar que esta clasificación ha ayudado a dar respuestas parciales al problema del espectro, notablemente el siguiente resultado de Shelah:

Teorema (Shelah)
Si T no es superestable, entonces $I(T,\alpha)=2^{\alpha}$ para todo cardinal α no numerable.

Este teorema dice que las teorías que no son superestables tienen el peor comportamiento posible en los cardinales no numerables, a saber, tienen el máximo número posible de modelos.

Otro resultado muy interesante de Shelah afirma que el comportamiento de la función $I(T,\alpha)$ no es malo, ya que, aun cuando la teoría no sea categórica en cardinales no numerables, es una función creciente.

Teorema (Shelah)
Si $I(T,\alpha)>1$ y α no es numerable, entonces $I(T,\alpha)\leq I(T,\beta)$ cada vez que $\alpha\leq\beta$.

Para terminar quisiera enunciar un problema abierto, es una conjetura de Vaught que ha permanecido mucho tiempo sin solución:

Conjetura (Vaught)
Si $I(T,\omega)>\omega$, entonces $I(T,\omega)=2^{\omega}$.

Claramente la conjetura es verdadera si suponemos la hipótesis del continuo, pero podría ser verdadera independientemente de él. Si fuera así, constituiría una razón para aceptar la verdad de la hipótesis del continuo.

Bibliografía

Chang, C. y H. Keisler, *Model Theory*, Amsterdam, North-Holland, 1992.

Jané, I., “Lógica de orden superior”, en C. Alchourrón (ed.), *Lógica. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, Madrid, Trotta, 1995.

Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Chicago, Van Nostrand, 1964.

Morley, M., “Categoricity in Power”, *Trans. Am. Math. Soc*. en núm. 114, pp. 514-538.

Quesada, D., “Lógica clásica de primer orden”, en Alchourrón, C. (ed.), *Lógica. Enciclopedia iberoamericana de filosofía*, Madrid, Trotta, 1995.