LA PRIMERA *BEGRIFFSSCHRIFT* FREGEANA

Luis Felipe Segura
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Departamento de Filosofía

La lógica de Frege se identifica normalmente con la *Conceptografía* y con el opúsculo que bajo este título se publica en 1879. Si bien Frege cree, con sobrada razón, haber dado un paso decisivo en la construcción de una teoría lógica a la altura de los requerimientos de la argumentación matemática moderna, los contenidos de esta nueva lógica, que él designa globalmente como *Begriffsschrift* o escritura conceptual, son tanto un *procedimiento* simbólico que adquiere forma concreta en aquella fecha, como un sistema específico de lógica, un cálculo lógico que sufre modificaciones esenciales con el desarrollo mismo del pensamiento de su autor. Existen en Frege dos versiones enteramente distintas en cuanto a reglas y nociones primitivas de la *Begriffsschrift*. El presente escrito se ocupa en detalle de la primera de estas formulaciones, haciendo énfasis en su vinculación orgánica con la evolución y con las metas del resto de la obra de Frege.

I

La *Begriffsschrift*[1] fregeana se plantea como meta principal la sistematización de los modos argumentativos lícitos en las matemáticas y su reducción a un conjunto ma-

[1] Nos referiremos en lo que sigue a la *Begriffsschrift* de 1879 simplemente como la *Begriffsschrift*, o también, como la *Conceptografía*. Cuando queramos hablar del sistema que con esta misma denominación aparece en 1893 y en 1903, usaremos la expresión *Begriffsschrift* de 1893.

nejable, mecánicamente controlable, de reglas y principios similares a los del álgebra. El objetivo primario de Frege es, entonces, la explicitación de la lógica utilizada en las matemáticas y su codificación concreta y exhaustiva en un sistema concreto. Con ello, Frege pretende avanzar en el sentido del movimiento rigorista de fundamentación del análisis en las matemáticas que tiene lugar en el siglo XIX, marcadamente —con excepción de Bolzano— en la segunda mitad de esta centuria, y cuyo resultado más notable es la llamada *aritmetización* del análisis, esto es, la construcción, a partir de supuestos puramente aritméticos, conjuntistas y lógicos, de los diferentes sistemas numéricos que conforman el análisis matemático.

La *Conceptografía* fregeana se asocia comúnmente, sin embargo, con un proyecto mucho más ambicioso: la reducción de los principios que sustentan tales sistemas numéricos a la lógica. Este sería, entonces, un *segundo* objetivo de la lógica de Frege, quien es el más conspicuo representante del logicismo moderno, esto es, de la concepción que sostiene que las matemáticas clásicas pueden obtenerse por completo a partir de la lógica. En él la tesis logicista es doble de acuerdo con esto: *a)* toda la argumentación matemática en el análisis puede reducirse a una argumentación estrictamente lógica (formalizable conceptográficamente) a partir de los axiomas aritméticos (por ejemplo, los que conforman la axiomatización de Dedekind y Peano); y *b)* no hay, en realidad, axiomas propiamente aritméticos, sino que éstos no son otra cosa que teoremas lógicos.

II

Partiendo de una idea cuyo origen se atribuye comúnmente —aunque de manera equivocada— a Leibniz,[2] Frege se dedica a la búsqueda de un cálculo que combine el carácter formal y algebraico con una capacidad tanto expresiva como analítica en relación con los conceptos, esto es, que permita, partiendo de una base simple y controlable de elementos simbólicos, la formulación y el análisis de *todos* los argumentos posibles, *i.e.*, dar cuenta en su totalidad del aspecto deductivo de las matemá-

[2] La idea aparece ya en Raymundo Lullio, Giordano Bruno, Dalgarno y Wilkins, entre otros. Cabe señalar, sin embargo, que su planteamiento en el contexto del problema de las relaciones entre matemáticas y lógica, en torno del cual el logicismo cobra en realidad forma, se da por primera ocasión en Leibniz, a quien Frege se remite explícitamente como antecedente histórico. (Cfr. Frege, 1879: v; 1882a: 2; 1882b: 54; 1896: 370.)

ticas. No se trata ya, por lo tanto, como en Leibniz, de hallar un "alfabeto del pensamiento"; la universalidad se encuentra ahora estrictamente restringida al ámbito de las matemáticas. Este es el origen de la más grande transformación creativa que la lógica experimenta desde Aristóteles, el primer momento estelar de la moderna lógica matemática, que en Frege no sólo tiene a su genial inventor,[3] sino al pensador con quien, además, se eleva a niveles de rigor comparables en muchos sentidos a los que prevalecen en nuestros días e inclusive superiores en muchos aspectos a los de algunos de sus sucesores.[4]

La opinión de Frege es que el error originario de la lógica tradicional ha sido su secular vinculación con los lenguajes naturales, particularmente con la gramática de éstos, y con la psicología. Estas fallas han restringido o deformado en exceso la concepción de la estructura de los objetos básicos de la lógica: los argumentos, las proposiciones y, en general, el contenido conceptual [*begrifflicher Inhalt*] como un todo, es decir, en el contexto de una proposición. Es esto y no los conceptos, ni los juicios, ni las oraciones ni los razonamientos lo que debe estar en la base de cualquier consideración lógica. La naturaleza de las proposiciones es, sin embargo, radicalmente diversa a la de sus posibles contrapartes lingüísticas o psicológicas,[5] por lo que su estructura misma no tiene por qué coincidir con la de éstas. Estas observaciones dan pábulo a la formulación de los principios metodológicos fundamentales que guían ya desde 1879 la reflexión fregeana sobre estos problemas:

---

[3] Bochenski (1956: 283) compara la *Begriffsschrift*, en cuanto a importancia histórica, con los *Primeros Analíticos.*

[4] *Principia* de Russell y Whitehead, por ejemplo, no alcanza los niveles de rigor definitorio de las *Grundgesetze.*

[5] Frege mismo se sirve, en la *Conceptografía* , no sólo constantemente sino, de hecho, casi de manera exclusiva del término *Urteil* (juicio), que la tradición había convertido en un objeto primario de la reflexión lógica, si bien —y esto ocurre en él ya desde 1879 y explícita y prácticamente sin excepciones desde 1893 (cfr. I, xxi y xxii, por ejemplo)— en un sentido que coincide, más bien, con el de *proposición.* Bolzano (1837) ya había llevado a cabo una minuciosa crítica del psicologismo en general y de este concepto en particular —que en muchos aspectos adelanta a la de Frege—, distinguiendo de manera precisa entre *juicio, oración, proposición* y *hecho*, lo mismo que entre *idea, palabra, concepto y objeto.* Mientras los primeros pertenecerían al ámbito de la psicología, lo segundo remite a un lenguaje particular; sólo los últimos dos de ellos son generales y objetivos; en particular, sólo las proposiciones y los conceptos pueden constituir el punto de partida de la lógica. El uso que Frege hace del concepto de *juicio* coincide exactamente con los resultados de este análisis, si bien, como se verá un poco más abajo, esto no impedirá que las nociones básicas mismas de su sistema no sean del todo claras.

a) “Separar siempre de manera precisa lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo” (Principio antipsicologista).[6]

b) “No preguntarse nunca por el significado de una palabra considerándola de manera aislada, sino siempre en el contexto de una proposición” (Principio proposicional).

El tercero es lo que podemos llamar un principio categorial:

c) “No perder nunca de vista la distinción entre concepto y objeto” (1884: xxii)

Si consideramos esto en un sentido estricto, por tanto, es decir, si tomamos en cuenta el planteamiento general anterior, la lógica de Frege se propone dar cuenta no de la argumentación correcta en general —como ocurre en Aristóteles o en Leibniz— sino *exclusivamente* de la argumentación utilizada o lícita en las matemáticas. A ello parece oponerse el subtítulo programático mismo de la *Conceptografía*. El objetivo de ésta sería, en efecto, el establecimiento de “un lenguaje formal del pensamiento puro, *modelado de acuerdo con la aritmética*”.[7] Sin duda, puede pensarse en una aplicación de la nueva lógica a ámbitos extramatemáticos, pero, en realidad, eso no resulta esencial para la evaluación de la misma: su campo propio y concreto son, en principio, las matemáticas, específicamente las matemáticas puras. La expresión “pensamiento puro” indica aquí un grado máximo de generalidad, por lo que se diferencia tanto del tipo de argumentación especial que tiene lugar en la ciencia o en los lenguajes particulares, esto es, en la esfera de lo que Frege llama (1879: xi) *el lenguaje de la vida*. Se trataría, en consecuencia, de un lenguaje artificial, sólo parcialmente afín al anterior. Sería, asimismo, en consonancia con su pretensión generalizadora y con su intención manifiesta de asemejarse a un cálculo algebraico, un lenguaje formal, es decir, un *lenguaje de fórmulas* —sin lugar a dudas, una traducción más literal y explícita, aunque menos natural, de la palabra *Formelsprache* del subtítulo.

Respecto a lo demás, la coincidencia entre la generalización a la que el carácter formal de este lenguaje obliga y el hecho mismo de que se tome como arquetipo a la

---

[6] Aunque los principios aquí citados aparecen explícitamente hasta 1884 (p. xxii), se encuentran ya, de hecho, implícita o explícitamente en todos los escritos lógicos de Frege desde 1879.

[7] Las cursivas son nuestras.

aritmética para su estructuración hace surgir la pregunta acerca de las razones por las que ésta puede dar lugar a principios aplicables de manera extrema, es decir, convertirse en un "lenguaje del pensamiento puro", una dificultad a la que Frege dará respuesta con la subordinación de la aritmética a la lógica. Es decir, por una parte, la lógica constituye en él el lenguaje de las matemáticas, tomando a la aritmética como punto de partida paradigmático; por la otra se presenta como un lenguaje del pensamiento puro. Podemos, sin embargo, identificar los principios de este último con aquellos principios que tienen validez universal: la lógica no se ocupa de campos específicos ni de objetos particulares —ese sería, en todo caso, un problema para una ciencia especial—, sino que se propone el grado más alto de generalidad. Este sería, también, el caso de la aritmética. No hay, por lo tanto, una generalización de lo particular (supuestamente la aritmética) a lo general (el pensamiento puro), sino que lo único que aquí se pretende es hacer uso de métodos y procedimientos de uso general, ya probados, de manejo y comunicación de tal pensamiento para la elaboración reflexiva de otra manifestación del mismo.

Ahora bien, si la aritmética puede reducirse a la lógica y ésta puede verse como un lenguaje especial —como algo parecido a la *Conceptografía*—, el análisis mismo y con él las matemáticas puras en general deben concebirse de igual manera. Hay en Frege, en consecuencia, varias reducciones: *a)* la lógica se codifica y se reduce a un lenguaje reglado. Es decir, no es algo abierto, algo que vaya constituyéndose a partir de los problemas y métodos demostrativos aceptados históricamente en las matemáticas, sino algo previo, concluido y atemporal; *b)* las matemáticas se reducen a un lenguaje en el que lo que importa es la justificación y la coordinación en el plano de tal lenguaje de los enunciados, de la teoría; y por último, *c)* el lenguaje —en sus distintas modalidades— en el que se pretende que consistan las matemáticas se reduce al lenguaje de *a)*.

La lógica de Frege intenta ser, entonces, en primer lugar, el lenguaje de las matemáticas clásicas, es decir, el lenguaje adecuado para la justificación de su aspecto deductivo —no necesariamente también de los axiomas mismos de las diversas teorías que las conforman—. La conjetura aquí sería que los principios de la nueva lógica bastan para justificar cualquier inferencia lícita en las matemáticas clásicas a partir de los axiomas, que el contenido de éstas puede formalizarse y que el sistema resultante es completo. En segundo lugar, la tesis de Frege es la de que la aritmética misma y los axiomas —principios argumentativos por ella presupuestos— son, en realidad, principios lógicos. Mientras que el primero de los objetivos de la lógica de Frege

—completud— se formula en él sólo en términos hipotéticos, como conjetura, la realización del segundo, de la tesis logicista, constituye el hilo de Ariadna mismo de su investigación en los fundamentos de las matemáticas. Es claro que la segunda tesis es independiente de la tesis lingüística y, asimismo, que ésta es no sólo previa a la primera, sino también implicada por ella. Por lo demás, parecería existir una conexión natural entre el desarrollo de la axiomática —a la que Frege convierte en un procedimiento formalizado, aunque con características peculiares en él—[8] y la concepción de la lógica y de las matemáticas como un *lenguaje*, una idea rica en consecuencias importantes y destinada a convertirse en centro de un debate sobre las bases mismas del quehacer matemático. Frege sería también el primer representante de esta postura.

Es común la constatación de que el sistema presentado por Frege en la *Conceptografía* constituye la primera formulación histórica de un cálculo lógico prácticamente idéntico o equivalente —salvo en lo que concierne a la notación— a los cálculos lógicos que hoy conocemos. En realidad, tal suposición es justa sólo con algunas reservas e identificaciones arbitrarias que pasan por alto elementos esenciales de la concepción global fregeana de la lógica y su naturaleza, por lo que resulta importante, para nuestros fines, una descripción en detalle de la misma. En lo que sigue nos ocuparemos, por lo tanto, de examinar la respuesta concreta que Frege da a una pregunta absolutamente esencial para su proyecto general: ¿Qué es la lógica?

Es evidente, en primer término, que la lógica requerida por la tesis logicista no es, ni puede ser, la lógica tradicional, ni la mezcla de lógica, filosofía y psicología que se presenta como "ciencia del pensamiento" a lo largo de todo el siglo XIX. Frege recoge o descubre por cuenta propia ideas fundamentales de Bolzano,[9] Boole y otros para crear una nueva lógica, incomparablemente más rica y sutil que la lógica anterior.

[8] *Vid*. un poco más abajo, las observaciones acerca del formalismo *semántico* fregeano.

[9] A quien, dicho sea de paso, no menciona ni una sola vez en toda su obra. Esta circunstancia no deja de ser extraña en vista de la minuciosa revisión que se hace —sobre todo en Frege, 1884— de cualquier idea que tenga que ver con los temas que se plantean y con independencia de qué tan conocidos sean sus autores. Lo es aún más si se considera que Frege mantiene relación y correspondencia tanto con Cantor como con Husserl, y que ambos se expresan con grandes elogios de Bolzano. En particular, Husserl escribe en las *Investigaciones Lógicas* (1900, I: 25 y 199) que Bolzano debe considerarse como "el más grande lógico del siglo XIX", reconociendo igualmente la influencia de éste en su obra, una observación que Frege difícilmente podía pasar por alto.

Como ya hemos mencionado, son dos, de acuerdo con Frege, los problemas básicos que permean la lógica tradicional:[10] su estrecha relación con el lenguaje natural y la presencia constante en ella de elementos de orden psicológico. En relación con el primero, el error fundamental en que se incurre sería la identificación de la estructura gramatical de las oraciones —analizada en la forma sujeto+verbo+predicado— con la estructura lógica de las proposiciones. Son éstas y las relaciones objetivas entre ellas, es decir, los argumentos, las que deben constituir el objeto de estudio de la lógica. Como Bolzano, Frege piensa que hay una esfera de contenidos objetivos no empíricos, con una legalidad y subsistencia propias, a los que llegamos por medio del lenguaje natural y gracias a nuestra estructura subjetiva. La lógica se interesa en los contenidos mismos, no en el modo de su obtención. Esta es la actitud general de Frege desde 1879. Es más explícita, sin embargo, en *Los Fundamentos de la Aritmética* y lo es aún más en los *Grundgesetze*: "Para mí —escribe en esta última obra (xviii)— existe un dominio de lo que es objetivo, que es diferente de lo real y fenoménico" y que es también (xvi) independiente de cualquier sujeto.[11]

Frege (1879: §3, 3) se refiere al contenido conceptual como "aquello que es lógicamente significativo", es decir, aquello que resulta esencial a una proposición para su evaluación lógica, pero, evidentemente, esto es insatisfactorio. En realidad, atendiendo a la construcción misma del sistema, esta idea ha de considerarse en él como primitiva.[12] La intención de Frege es precisamente la de construir un aparato *lingüístico* que, refiriéndose exclusivamente a tales contenidos, baste, sin embargo, para el análisis lógico de los argumentos en las matemáticas.[13] Estos son los fines que se

[10] Usando esta designación nos referiremos en lo que sigue tanto a la lógica tradicional aristotélica y escolástica como a la psicología lógica, tan común en la época de Frege.

[11] Frege coincide plenamente con Bolzano también en este punto. Éste distingue en 1837 (por ejemplo, en §19 y §48) entre *realidad* y *objetividad*. Lo primero sería una subclase de lo segundo. En el ámbito de lo real o existente cabría todo lo fenoménico y mutable; en el de lo objetivo, todo aquello que es independiente de cualquier subjetividad, como los conceptos [*Vorstellung an sich*] y las proposiciones [*Satz an sich*].

[12] La supresión completa de esta noción en las *Grundgesetze* permite formarse una idea de los alcances de las modificaciones que se hacen allí al sistema de la *Conceptografía* de 1879.

[13] "En palabras de Leibniz puede decirse que la Lógica de Boole es un *calculo raciocinator* [esto es, formal y deductivo], mientras que la lógica matemática de Peano es, ante todo, una *lingua characterica* [es decir, una que pretende vertir contenidos en formas] y de manera secundaria también un *calculo raciocinator*. Mi *Begriffsschrift* les concede a ambos aspectos la misma importancia." (Frege, 1896: 371.)

plantea la *Conceptografía* y explica, asimismo, la designación del nuevo lenguaje. El sistema se plantea, entonces, dos cosas: *1)* el análisis simbólico, sin recurso alguno al razonamiento intuitivo —fuera del reconocimiento elemental de los signos especiales—; y *2)* su idoneidad, esto es, su completud[14] para tal análisis. La *Begriffsschrift* "debe hacer posible, en principio, el examen riguroso y seguro del carácter conclusivo de una cadena de inferencias, así como poner de manifiesto cualquier supuesto que pretenda deslizarse embozadamente [en la argumentación], para que pueda ser investigado y su origen detectado" (Frege, 1879: iv). En cualquier caso, una de las condiciones a satisfacer por cualquier cosa que haya que entender por lógica es la generalidad de sus principios —en consonancia con el hecho de que su objeto lo constituye el pensamiento puro—. Esto supone, a su vez, el carácter en última instancia vacío de los mismos. La lógica no tiene nada que ver con la experiencia ni con la psicología, sino que constituye, por así decirlo, una reflexión de segundo grado sobre las proposiciones y sus relaciones analíticas y deductivas. Es de esta manera, también, que debe entenderse la *necesidad*, comúnmente asociada a la lógica: la necesidad sería el ámbito propio de ésta, el ámbito *exclusivo* de ella, si aceptamos la tesis logicista. *Necesario* es un adjetivo aplicable sólo a proposiciones e indicativo del carácter puramente lógico de su justificación (cfr. Frege, 1879: iii).

III

Pasemos ahora al aspecto constructivo de la lógica de Frege. La lógica de la *Conceptografía* se propone establecer las leyes generales de las conexiones entre las

[14] En efecto, el examen del contenido conceptual que el lenguaje especial de Frege llevaría a cabo tendría que proporcionar *todo* aquello que resulte necesario para la argumentación (cfr. Frege, 1879: §3, 3). En §13, 22 de esta misma obra se dice que "como no es posible formular explícitamente todas las leyes de la lógica, la completud [*Vollständigkeit*] sólo puede alcanzarse investigando aquellos principios que contienen, *en potencia*, a todos los demás" (cfr. también *loc. cit.* §13, 25). De manera implícita, entonces, Frege plantea aquí el problema metateórico de la completud del sistema. Frege no se plantea en forma alguna en 1879 el problema de la consistencia e independencia de sus principios. En 1893 sí hay una consideración clara de este último problema. Como se sabe, no será prácticamente sino hasta 1902, en la etapa final de su investigación, cuando la primera de estas dificultades se presenta de manera acuciante.

verdades. No hay en ella, por lo tanto, una distinción entre sintaxis y semántica. La lógica de Frege es una lógica formal interpretada. Frege se inspira en el concepto de función, que las matemáticas del siglo XIX habían desarrollado hasta convertir en una de las nociones absolutamente básicas del análisis,[15] para introducir[16] la idea de *función proposicional*, sin lugar a dudas la noción cardinal de la lógica moderna. Frege reemplaza con ella la añeja descomposición aristotélico-escolástica de los juicios en sujeto+cópula+predicado, haciendo posible una consideración mucho más sutil de los argumentos —una que, por ejemplo, se hace cargo de las proposiciones relacionales—. Con ello se sientan también, definitivamente, las bases para un análisis extensional, cuasiconjuntista, de los predicados que Bolzano, a pesar de sus logros, no acaba de asumir en todas sus consecuencias.[17]

No obstante su carácter fundamental en la lógica de Frege, el concepto de función[18] carece en él, sin embargo, de una doble falta de claridad definitoria: por una parte, su *status* no tiene la precisión necesaria; por la otra, el uso mismo que Frege hace del concepto parece cancelar el tercero de sus principios metodológicos. Esto último tendrá consecuencias graves para él más tarde al hacer inconsistente la versión más avanzada del sistema que se presenta en 1893.

IV

Examinemos brevemente, en primer lugar, la caracterización que Frege hace de sus nociones básicas. En la *Conceptografía* (§9,15) se dice:

> Si pensamos una expresión de esta manera, [es decir, con la modificación que permite el paso de 'María va por el pan' a 'Pedro va por el pan' y viceversa,] como algo variable, ésta se divide en una parte constante, que representa la totalidad de las relaciones, y en el signo que se considera reemplazable por otro y que se refiere al objeto que mantiene estas relaciones. A la primera la llamo función, a esta última su argumento.

[15] Aparentemente, el término es utilizado por primera ocasión por Leibniz en el siglo XVIII (cfr. Couturat y Robbins, 1941: 285).
[16] O reintroducir, pues Bolzano ya se había ocupado de ella en detalle en 1837. Cfr. nota 6.
[17] Este último paso no será dado por Frege, sin embargo, sino hasta la *Begriffsschrift* de 1893.
[18] Nos referiremos siempre con este término, en lo que sigue, a las funciones proposicionales.

De acuerdo con esto, las funciones son expresiones, esto es, tienen un carácter *lingüístico* y se diferencian, por lo tanto, de los objetos y de las proposiciones mismas.

Ahora bien, una misma expresión puede considerarse como *valor* de la función desde varias perspectivas, de acuerdo con el análisis que hagamos de ella. El primer problema aquí es el de la relación precisa entre funciones y proposiciones. De acuerdo con el primero de los principios metodológicos fregeanos, son éstas las que deben constituir el supuesto básico e inicial de cualquier reflexión. Las funciones parecerían obtenerse de ellas por *abstracción* de algún elemento constitutivo de las mismas, lo que permite un mejor análisis de la generalización. Pero esto significa no sólo que las proposiciones son expresiones, sino también que hay algo que podemos considerar como *proposiciones elementales*, en las que la cuantificación no juega ningún papel. En ninguna parte de la obra de Frege hay una descripción de tales enunciados. Por lo demás, no es del todo claro, como ya hemos apuntado, que Frege considere a las proposiciones como algo puramente lingüístico. Otra dificultad sería la siguiente: ¿cómo podemos distinguir la parte constante de la función —si es que la hay— de lo que es sólo un argumento, puesto que el enunciado es en cada caso el mismo, esto es, puesto que "la distinción no tiene nada que ver con el contenido conceptual, sino que es asunto exclusivo de la interpretación [*Auffassung*]" (1879: §11, 9)? Esta ambigüedad se traslada a la notación: 'Φ(A)', que puede ser vista, en efecto, como una función tanto de 'A' como de 'Φ' (1879: §10, 19) La cláusula limitativa en la pregunta anterior se refiere al siguiente problema. ¿Por qué no se acepta también, como en Bolzano, y con las serias consecuencias que para éste acarrea, que 'come' pueda ser un argumento de la función y, así, que el enunciado 'Juan come espinacas frescas' pueda considerarse, igualmente, como un valor de la función ternaria 'xyz'? Esto haría prácticamente inútil la operación misma de sustitución en lo relativo a la evaluación semántica, por ejemplo como matriz analítica, pues, por ejemplo, de la función 'xyz' podría obtenerse tanto 'Juan come betabeles' como 'Juan no come betabeles', al poner en un caso 'come' y en el otro 'no come' en lugar de la variable 'y'. Como sea, parecería que al adoptar el punto de vista según el cual una proposición se descompone siempre en argumento(s) y función, Frege establece implícitamente un límite a lo que pueda considerarse como sustituible, con lo cual, también, está obligado a aceptar diferencias categoriales, aunque éstas no sean del todo claras.

La generalidad es explicada por Frege, por otra parte, como "la afirmación de la función, independientemente de cuáles sean los argumentos que aparezcan en lugar de las variables” (1879: §10, 18). La notación correspondiente es ‘|— Φ(A)’, que expresa que “A tiene la propiedad Φ” (*ibid.*). Sin embargo, los cuantificadores, que hacen notacionalmente *explícita* la generalidad, pueden también formar parte de una función (*ibid*., §9, 17) y, por otra parte, puesto que, como hemos dicho, el signo funcional ‘Φ’ de Φ(A) puede aparecer, él mismo, como argumento, es también generalizable (1879: §11, 19). Con ello, Frege parece acercarse a la posición de Bolzano y cancelar la distinción misma entre función y argumento. En un intento limitativo de las posibilidades de sustitución, se añaden estipulaciones que indican que las variables se piensan en él como algo que tiene un rango propio de valores, es decir, que hay diferencias categoriales entre argumentos y función, pero el curso que han de seguir tales restricciones —la conservación del carácter judicativo [*Beurteilbarkeit*] de las expresiones resultantes (*ibid.*)— es demasiado vago.[19]

Lo anterior significa no sólo que la lógica que Frege tiene en mente es lo que hoy se llama una lógica de orden superior, que la *Conceptografía* es un cálculo extendido de predicados, sino que tiene, además, para el problema que nos ocupa, la desagradable consecuencia de dejar prácticamente en el misterio la índole misma de sus objetos básicos. En efecto, la cuantificación de algo implica su cosificación, por así decirlo, su conversión en objeto,[20] pero esto significa la cancelación de la diferencia básica prescrita por el principio categorial de Frege, al mismo tiempo que contradice el carácter lingüístico que supuestamente tendrían las funciones.

Como sea, las funciones juegan en Frege no sólo un papel fundamental en lo que concierne a la explicación interna de las proposiciones, sino que permitirán más tarde, asimismo, una explicación de los *conceptos* (1879: xiii)[21] que para las metas del logicismo resultan decisivos.

---

[19] Frege hace uso de la cuantificación explícita de las funciones en la tercera parte de la *Conceptografía* (§27ss., 62-65) para la definición de las sucesiones y para la obtención más tarde, a partir de ello, del principio de inducción matemática.

[20] Según ha mostrado Quine en “Logic and the Reification of Universals”, *From a logical point of view*, Harvard, 1953, 2a. ed., 1961.

[21] Esta idea constituirá, en la forma de las nociones *caer bajo un concepto, curso de valores de una función* y *extensión de un concepto,* uno de los primitivos de la construcción de la aritmética a partir de la lógica, que Frege pone en ejecución detallada a partir de 1893. De cualquier modo, ya en la *Begriffsschrift* (xiii) se habla de que “la concepción de un contenido como función permite construir conceptos [*wirkt begriffsbildend*]”.

Las expresiones funcionales y para argumentos dan lugar a los *contenidos judicativos* [*beurteilbare Inhalte*], es decir, a contenidos conceptuales susceptibles de ser afirmados y, de esta manera, de generar, por así decirlo, las proposiciones. '—Φ(A)' es una expresión compleja que consta de la barra de contenido [*Inhaltsstrich*], '—', y del contenido Φ(A). Por sí sola, la expresión 'Φ(A)' se refiere entonces al contenido Φ(A), mientras que, en general, la barra de contenido antepuesta a un contenido cualquiera *a* debe leerse como "*la circunstancia de que* α". Por otra parte, si *a* es un contenido judicativo, '|—α' significa la afirmación de α. '|', la barra judicativa [*Urteilsstrich*], es lo que convierte a un contenido judicativo considerado propiamente en una proposición.

Al igual que en el caso de las funciones, no queda claro en estas explicaciones qué es precisamente '—α'. No puede, en efecto, identificarse con un nombre de α, es decir, con 'a', porque ésta es una expresión, mientras que la frase "la circunstancia de que α" [*der Umstand, daβ…*] parece más bien remitir a algo extralingüístico y considerativo. En el fondo, lo que aquí se presenta es un problema de uso y mención.[22] Como hoy es práctica común, para referirse, para considerar un enunciado, basta usar un nombre para el mismo. Esta parece ser la intención de Frege al introducir la barra de contenido, pero la interpretación que hace del signo provoca confusión al remitir a algo no lingüístico.

Otros dos elementos de la gramática de la *Conceptografía* son el *condicional* [*die Bedingheit*], que Frege define (1879: §5) de manera casi veritativo-funcional y la *negación* [*die Verneinung*]. En ambos casos, se trata de operaciones que no se aplican directamente a proposiciones ni a contenidos, sino a consideraciones de contenido (*ibid.,* §§5 y 7). Así, la negación de la proposición '|—α' ("la afirmación de la circunstancia de que a") es '|—⊥—α', esto es, la afirmación de la circunstancia de que *a* no tiene lugar —o, estrictamente, la afirmación de la circunstancia de que no es el caso de que la circunstancia de que *a* tenga lugar.[23] Por otra parte, para la

[22] A Frege mismo se debe esta distinción que forma parte de la versión de la *Conceptografía* que se presenta en las *Grundgesetze*. La distinción resulta necesaria a partir de la distinción fundamental que allí se hace entre nombres y objetos y entre el sentido y la denotación como aspectos inherentes a los primeros.

[23] Frege se sirve de una notación bidimensional en la forma de un rectángulo no cerrado del lado derecho para la notación del condicional. Las líneas horizontales del mismo pueden considerarse, entonces, como barras considerativas, del antecedente la inferior y del consecuente la superior, mientras que la línea vertical ½ expresaría propiamente la relación condicional.

cuantificación universal Frege utiliza letras góticas minúsculas como variables que deben colocarse en la cavidad de la expresión '—◡—Φ( )', así como en el hueco después del signo funcional.

Frege en 1879 (§8, 13-15) hace uso del signo '≡' para expresar identidad. Sin embargo, ésta se presenta no como identidad de objetos, ni como equivalencia proposicional, sino como una relación entre *nombres*, de modo que, prolijamente dicho, si α y β son dos *nombres de contenidos*, '|—α≡β' significa afirmar la circunstancia de que a y b designan lo mismo. Claramente esto implica que los contenidos admitidos en el sistema no son exclusivamente contenidos judicativos, sino contenidos en general, es decir, funciones, juicios e incluso constantes lógicas como la negación, el condicional o la cuantificación, incluyendo nombres de contenidos.

En realidad, el tratamiento que se hace del signo de igualdad constituye tal vez el problema más grave de la *Conceptografía*. Frege explica la introducción de la igualdad en esta forma como sigue (1879: §8, 14): "El mismo contenido puede ser determinado por completo de muy diversas maneras. Pero el hecho de que en un caso particular realmente se determine lo *mismo* es el contenido de un *juicio*. De cualquier manera, antes de que esto ocurra debe darse un nombre distinto a cada una de ellas". Esto significa, entonces, que una afirmación de identidad es una afirmación sobre *signos* y no sobre los contenidos a los que éstos remiten. Es decir, hay una especie de ambigüedad autonímica que Frege admite de manera explícita (*ibid.*), esto es, el signo de identidad es un signo de identidad *de contenidos*, aunque, de hecho, se refiera a signos. La introducción de '≡' apunta, en todo caso, como es obvio, a una necesidad más general de clarificación del lenguaje de la *Conceptografía*, que ya hemos advertido anteriormente. En particular, en relación con la identidad, Frege mismo acometerá esta empresa en sus escritos de semántica, cuyo origen debe remontarse, en consecuencia, a estos problemas.[24]

[24] Y, por supuesto, a la necesidad de una explicación satisfactoria de la igualdad matemática, que concilie el "carácter sintético" (1879: §8, 15), no trivial, de la identidad, con la unidad que su verdad implica.

V

Intentemos ahora, una vez hechas las aclaraciones pertinentes, una sistematización de las reglas de formación del sistema lógico de la *Begriffsschrift*, así como una descripción de su aparato deductivo. Los elementos expresivos básicos de esta escritura conceptual son:

a) funciones proposicionales
b) argumentos de funciones
c) — (barra de contenido)
d) | (barra judicativa)
e) ~ (negación)[25]
f) $\rightarrow$ (condicional)
g) (cuantificador universal)
h) $\equiv$ (signo de identidad [Gleichheitszeichen])
i) nombres de contenido

Un *contenido* es cualquier expresión compuesta de los signos anteriores.[26]

Las reglas generales de formación de expresiones en el sistema serían las siguientes: *1) Contenidos judicativos* (CJ):

1. Si F es una función y *A* es un argumento para F, entonces F(A) es un CJ
2. Si *a* es un CJ, entonces $\sim(—\alpha)$ es un CJ
3. Si α y β son CJ, entonces $(—\alpha)\rightarrow(—\beta)$ es un CJ
4. $(\ \delta)—\Phi(\delta)$ es un CJ, si F es una función y *d* una variable
5. Si *n* y *h* son nombres de contenidos, entonces $\nu\equiv\eta$ es un CJ

[25] Con el objeto de observar mejor las ventajas que para Frege se derivan de la utilización de un sistema bidimensional de notación a partir de la selección que hace de signos primitivos y sin dejar de tener presentes las diferencias que hemos apuntado en los párrafos anteriores, usamos aquí los símbolos usuales para el condicional y para la cuantificación universal y nos serviremos libremente de los paréntesis como signos de asociación.

[26] Evidentemente hay aquí una especie de círculo vicioso debido al carácter ambiguo del signo de identidad.

Las proposiciones o juicios pueden ahora definirse fácilmente: *2) Proposiciones*. Si *a* es un CJ, entonces $\vdash$—α es una proposición.

Como ahora podemos ver claramente, las proposiciones no se obtienen en Frege directamente a partir de los contenidos, sino por mediación de la barra de contenido, es decir, de su consideración.

Pasemos ahora a la descripción del sistema deductivo mismo de la *Conceptografía*.

El cálculo lógico de Frege consta de nueve axiomas y tres reglas de inferencia — de las que se enuncia explícitamente sólo una.

Axiomas. Sean α, β y γ CJ, δ una variable, Φ una función, ν un argumento para la misma y *h* y *k* nombres de contenidos. Los siguientes son axiomas:

(1) $\vdash$—(—α $\rightarrow$ —[—β $\rightarrow$ —α])
(2) $\vdash$— [—[—α $\rightarrow$ —(—β $\rightarrow$ —γ)] $\rightarrow$ —[—(—α $\rightarrow$ —β) $\rightarrow$ —(—α $\rightarrow$ —γ)]]
(8) $\vdash$— —[—(—α $\rightarrow$ —(—β $\rightarrow$ —γ))]$\rightarrow$ —[—β $\rightarrow$ —(—α $\rightarrow$ —γ)]
(28) $\vdash$— —[—α $\rightarrow$ —β] $\rightarrow$ —[—(~(—β)) $\rightarrow$ —(~(—α))]
(31) $\vdash$— —[~(—(~(—α)))] $\rightarrow$ —α
(41) $\vdash$— —α $\rightarrow$ —[~ (—(~(—α)))]
(52) $\vdash$— —($\eta\equiv\kappa$)$\rightarrow$ —(—$\Phi(\eta)$$\rightarrow$ —$\Phi(\kappa)$)
(54) $\vdash$—$\eta\equiv\eta$
(55) $\vdash$— —(□δ)—$\Phi(\delta)$$\rightarrow$ —$\Phi(\nu)$

VI

Mientras que los primeros seis principios constituyen, *mutatis mutandis*, un conjunto completo de axiomas para el cálculo proposicional, el séptimo y el octavo dan expresión en el sistema a las propiedades de la igualdad, al tiempo que el noveno es el de la especificación universal. Frege reconoce también la necesidad de principios no pertenecientes al sistema, esto es, reglas de inferencia. Explícitamente: una especie de *modus ponens*, que de $\vdash$— —α $\rightarrow$ —β y $\vdash$— —α permite inferir $\vdash$—β; implícitamente: una de sustitución y otra que permite el paso de

$\vdash$— —*A* $\rightarrow$ —$\Phi(\alpha)$ α $\vdash$— —A $\rightarrow$ —(□δ)—$\Phi(\delta)$, si *A* es un CJ y *a* un argumento que no aparece en *A* para una función F. Frege considera también '$\vdash$— $\Phi(\nu)$' y '$\vdash$— (□δ)$\Phi(\delta)$' como definicionalmente idénticos. "Estas reglas y las leyes que representan no pueden expresarse en el sistema mismo de la *Conceptografía*, precisamente porque constituyen su fundamento” (1879: §13, 25). Al igual que los axiomas y los teoremas del sistema, son principios del pensamiento puro, aunque aquí transformados en reglas imprescindibles para el manejo de *signos* (*ibid.*). El papel que se asigna a la intuición es precisamente éste: reconocer la validez de los principios axiomáticos y aplicar las reglas simbólicas del sistema, junto con aquellas que le sirven de base.

El sistema de Frege posee expresivamente una base adecuada para el cálculo de enunciados, así como para el cálculo de predicados restringidos con igualdad, con tal de que interpretemos la consideración de CJ como variables proposicionales, ‘º’ como igualdad, los nombres de contenidos como nombres de objetos o términos individuales y se restrinja la cuantificación a la cuantificación de primer orden. Como hoy nos resulta evidente, el conjunto de los axiomas del sistema no es independiente —es posible, por ejemplo, prescindir de los axiomas (8), (28) y (41).

Una característica importante de la *Conceptografía* es la ausencia en ella de una separación tajante y clara entre la semántica y la sintaxis. Así, por ejemplo, la contraparte fregeana de nuestro ‘A $\rightarrow$ B’ no representa una combinación de signos que pueda *interpretarse* en términos veritativos, sino que afirma directamente: “El caso de que B sea verdadera y A sea falsa no ocurre” (1879: §5, 5). En otras palabras, el sistema de Frege no es, en rigor, un sistema axiomático formal, tal como hoy concebimos éste; no es, por lo tanto, un lenguaje formal en el sentido de Hilbert, un lenguaje susceptible de diversas interpretaciones —aunque con una principal—; en Frege las expresiones poseen siempre un significado o, más precisamente, un contenido conceptual. A diferencia de algunos de sus antecesores, por ejemplo, Boole, cuya intención era “representar en fórmulas una lógica abstracta” —en fórmulas susceptibles de diversas interpretaciones—, lo que Frege se propone es “expresar un contenido por medio de signos escritos, de manera más precisa y comprensible que lo que las palabras hacen posible” (1882: 97). En particular, las nociones de consecuencia y demostrabilidad no son distinguidas en él. No se trata, sin embargo, como en la lógica tradicional, de un estudio de fórmulas por medio de argumentos basados en una lógica intuitiva, sino que lo que se busca es incorporar a un lenguaje especial todo aquello que resulta necesario precisamente para prescindir del razonamiento intuitivo.

VII

La tercera y última parte de la *Conceptografía* (§24-§26) presenta una aplicación del nuevo sistema a la teoría de las series. Frege logra definir aquí no sólo la noción de que una propiedad sea *hereditaria en la serie*, sino, asimismo, la relación de *sucesor inmediato en la serie*. Con ello se sientan las bases para la obtención del principio de inducción finita y, por lo tanto, de la totalidad de la aritmética. Este descubrimiento, que seguramente contribuye de manera decisiva a reforzar la convicción de Frege en la esencial deducibilidad de la aritmética a partir de la lógica, requiere una cuantificación de orden superior y marca el punto de transición entre los dos objetivos centrales de la lógica fregeana.[27] Frege considera (1879: §23, 54) esta definición como un ejemplo paradigmático de la manera en la que el análisis lógico puede desplazar a la intuición.[28]

VIII

Intentemos ahora, para terminar, una evaluación general y crítica de la primera lógica de Frege.

La primera síntesis histórica de la lógica proposicional y la lógica de predicados y relaciones se lleva a cabo, esencialmente, en el cálculo de la *Conceptografía*. Pero esta lógica no sólo es novedosa en lo relativo a métodos, enfoque, sistematicidad y

[27] Frego define en el §24 de la *Conceptografía*, en primer lugar, lo que significa que una propiedad F sea "hereditaria en la serie f". Esencialmente y *mutatis mutandis*: F es hereditaria en la serie f si

$$(\square\delta)(\Phi\delta \rightarrow (\square\alpha)(\phi(\delta,\alpha) \rightarrow \Phi\alpha)).$$

De aquí se obtiene en el §26 la definición de sucesor en la serie f (fórmula 76):

$$(\square F)[(F\ f\text{-hereditaria} \ \&\ (\square\alpha)(\phi(x,\alpha) \rightarrow F\alpha)) \rightarrow F\psi],$$

de la cual Frege hace la siguiente paráfrasis: "Si de las dos proposiciones de que el resultado de aplicar f a x tiene siempre la propiedad F y que esta propiadad es hereditaria en la serie f, independientemente de cuál sea esta F, puede concluirse que y tiene la propiedad F, decimos que "y sigue a x en la serie f". A partir de esto, Frege obtiene (fórmula 81) un principio esencialmente equivalente a la inducción de Bernoulli: Si x tiene una propiedad F que es f-hereditaria y si y sigue a x en la serie f, y mismo tiene la propiedad F.

[28] Es notable aquí el paralelo entre la demostración que hace Bolzano del teorema que lleva su nombre y las consecuencias que éste extrae de ella y este descubrimiento de Frege y su evaluación del mismo.

aplicaciones, sino que constituye asimismo una condición necesaria para el planteamiento de interrogantes sobre el sistema como un todo. En otras palabras, sólo en relación con un sistema *parecido* al de Frege, sintácticamente preciso, en el que el aparato expresivo y deductivo sea enteramente explícito, es posible plantear consideraciones de carácter global sobre los límites y las capacidades del sistema mismo, como completud, consistencia, independencia, dispensabilidad de reglas, pruebas de imposibilidad, etc., tan característicos de la lógica contemporánea. Frege es también el primero en hacer un uso claro y general de las variables y el primero en utilizarlas sistemáticamente para explicar la cuantificación. En estos sentidos, la *Conceptografía* constituye el primer sistema moderno de lógica.

Todo ello no puede ocultar, sin embargo, el carácter problemático de varios aspectos de la construcción, algunos de ellos fundamentales. En la conciencia que Frege mismo tiene de esta circunstancia, sobre todo en lo que atañe a la índole precisa de las funciones, a la distinción clara entre éstas y los objetos y al tratamiento que en 1879 se ofrece de la igualdad, debe buscarse, en realidad, la génesis de sus ulteriores escritos semánticos, cuyos títulos mismos son reveladores de tales inquietudes.[29]

Frege emprende en las *Grundgesetze* una reforma a fondo de la parte semántica de su lógica, que hace del sistema de la *Conceptografía* algo esencialmente más complejo y refinado que su contraparte de 1879. Se distingue así, consecuentemente, entre uso y mención, en primer término. En el curso de esta consideración se introduce luego una teoría general de las expresiones significativas, que concibe a éstas, en realidad, como *nombres*, y al significado como un complejo compuesto de un *sentido* y una *denotación*. La denotación, aquello a lo que se refiere un nombre, es ahora múltiple: algunas expresiones denotan *objetos*, otras *funciones* y otras, por último, *valores de verdad*. En particular, los juicios y los contenidos conceptuales desaparecen como elementos constitutivos del sistema, y se habla ahora de las proposiciones en un sentido lingüístico, como nombres, cuya referencia es siempre uno de los dos valores de verdad, lo verdadero o lo falso.

La distinción entre estas facetas del significado se encuentra estrechamente ligada a los problemas suscitados en 1879 por la ambigüedad en torno al signo '≡' y

[29] *Función y concepto* (1891), *Sobre el sentido y la denotación* (1892a), *Concepto y objeto* (1892b), como se les conoce en español.

permite a Frege no sólo un tratamiento satisfactorio de la igualdad, sino también una separación clara entre extensionalidad e intensionalidad. Esta última es enteramente prescindible en las matemáticas, por lo que Frege puede ocuparse exclusivamente de la denotación.

Otra diferencia fundamental entre los sistemas de 1879 y 1893 es la relativa a las funciones. En las *Grundgesetze* el carácter *no lingüístico* de las mismas forma parte de la teoría general de nombres que acabamos de mencionar. Las funciones son ahora referentes de ciertas expresiones.[30] Como tales, tienen un carácter *objetivo*, si bien siguen pensándose como algo esencialmente diferente de los objetos. Su relación con éstos y con los enunciados es ahora mucho más precisa: las variables forman parte de las funciones, pero se distingue ahora, en lo que a ellas se refiere, entre *valores* y *sustitutos de la variable* (es decir, nombres de sus valores), *valores de la función* (V o F) y *enunciados*. Las variables representan, por así decirlo, el "hueco" en las funciones, su aspecto característico, que Frege describe como su no-saturación [*ungesättigt sein*]. Esto es, también lo único que las diferencia de los objetos. Con cierto tipo de funciones, los conceptos, Frege puede luego definir el *curso de valores* [*Werteverlauf*] y la *extensión* de los mismos, con lo que obtiene un aparato esencialmente equivalente a una teoría de conjuntos y puede luego construir el resto de la aritmética.

[30] Como palabras-concepto [Begriffswörter], palabras-relaciones [Beziehungswörter], etcétera.

Bibliografía

Bochenski, J. 1956. *Formale Logik*, Zürich, Albers.
Bolzano, B. 1837. *Wissenschaftslehre*, publicada parcialmente como *Grundlegung der Logik* por F. Kambartel, Hamburgo, Felix Meiner, 1963.
Courant, R. y Robbins 1941. *What is Mathematics*?, Nueva York, Oxford U.P. [Citada de acuerdo con la edición española, Madrid, Aguilar, 1971.]
Frege, G. 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens*, reimpr. en *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, edit. por I. Angelelli, Hildesheim, Olms, 1964.
1879a. "Anwendungen der Begriffsschrift", reimpr. ver Frege, 1879, pp. 89-93.
1882a. "Über den Zweck der Begriffsschrift", reimpr. ver Frege, 1879, pp. 97-106.
1882b. "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift", reimpr. ver Frege, 1879, pp.106-114.
1884. *Die Grundlagen der Arithmetik*, reimpr. (J. L. Austin, edit.), Oxford, Blackwell, 1953.
1884a. *Die Grundlagen der Arithmetik*, Centenar Ausgabe, ed. por C. Thiel, Hamburgo, F. Meiner, 1986.
1891. "Funktion und Begriff", reimpr. en (G. Patzig, edit.) *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*, Gotinga, Vandenhoeck u. Ruprecht, 1965.
1892a. "Über Begriff und Gegenstand", reimpr. ver Frege, 1891.
1892b. "Über Sinn und Bedeutung", reimpr. ver Frege, 1891.
1893. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. I, reimpr. Hildesheim, Olms, 1962.
1896. "Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene", Leipzig, Königl. Sächsiche Gesell. der Wiss., Mathematisch-physikalische Klasse 48, pp. 361-378.
1903. *Die Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, reimpr. Hildesheim, Olms, 1962.
1904. "Was ist eine Funktion?" en el *Festschrift Ludwig Boltzmann, gewidmet zum 60. Geburstag*, Leipzig, A. Barth, pp. 556-566.
Husserl, E. 1900. *Logische Untersuchungen* I, Freiburg, Niemayer, 1968.
Kant, I. 1737. *Kritik der reinen Vernunft*, Stuttgart, Reclam, I. Heidemann (edit.), 1966.