Signos Filosóficos, vol. VI, núm. 11, enero-junio, 2004, pp. 97-120

EL CÁLCULO INFINITESIMAL LEIBNICIANO: UNA SÍNTESIS DE LAS PERSPECTIVAS DE BRUNSCHVICG E ISHIGURO

OSCAR GONZÁLEZ GILMAS*

Resúmen: Este artículo estudia el tratamiento que dio Leibniz a los infinitésimos, utilizándolos para los cálculos, por una parte, pero considerándolos como inexistentes por otra. A partir de los comentarios previos de Brunschvicg y de Ishiguro acerca de este paradójico estatuto de los infinitésimos en Leibniz, se propone una síntesis de ambas argumentaciones, basada en el carácter algorítmico de los infinitesimales y en la presuposición del principio de continuidad, el cual permite la aplicación del cálculo infinitesimal a la física. El cálculo infinitesimal leibniciano se muestra así como uno de los mejores ejemplos de su Característica Universal, en especial por su utilidad para el Arte de Inventar.

Abstract: *This article studies Leibniz's treatment of infinitesimals: their application to the calculus and his opinion that they did not exist. In partial agreement with Brunschvicg's and Ishiguro's commentaries on the paradoxical status of Leibniz´s infinitesimals, this study proposes a synthesis of both interpretations, which is based on the algorithmic nature of infinitesimals and on the assumption of continuity, and which renders possible the application of the Infinitesimal Calculus to physics. Leibnizian Infinitesimal Calculus is one of the best examples of his Universal Characteristic, particularly because of its usefulness in the Art of Invention.*

PALABRAS CLAVE: DIFERENCIAL, INCOMPARABILIDAD, INDIVISIBLE, INFINITESIMAL, INFINITO

LEIBNIZ Y LOS INFINITÉSIMOS, SEGÚN BRUNSCHVICG

Según Yvon Belaval, el *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* que publicó Leibniz en 1684 fue el resultado de la iluminación súbita que él había tenido al leer

* Profesor del Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad del País Vasco, gilmas@euskalnet.net

RECEPCIÓN: 25/01/03 ACEPTACIÓN: 23/07/03

algunos manuscritos geométricos de Blaise Pascal en 1675 y ver el triángulo característico en una figura.[1] Sin embargo, hay otras influencias que confluyeron en el concepto leibniciano de diferencial. Por un lado, el desarrollo de la geometría de los indivisibles,[2] y por otro, el método de las tangentes. Veamos someramente estas dos líneas siguiendo la guía que nos ofrece Brunschvicg.

En el origen de la investigación infinitesimal, la geometría de Bonaventura F. Cavalieri había establecido, gracias a la abstracción matemática, la verdad y legitimidad del cálculo de los indivisibles. Ello trajo consigo una importante crisis en el pensamiento del siglo XVII. Uno de los principales teóricos de esa crisis fue Blaise Pascal. A la vista del rechazo general de los infinitésimos por la metodología basada en el ideal escolástico de la deducción, y constatando la manifiesta impotencia del hombre para realizar el ideal metodológico de usar sólo nociones perfectamente definidas de antemano, Pascal se decidió a introducir el concepto de infinito por doquier. Contrariamente a las teorías que ligaban la abstracción matemática a la realidad física, Pascal abrió una nueva vía, basada en la consideración de un infinito tan pequeño como se quiera, independientemente de que careciera de extensión física, y fuera por ello indivisible. Sin embargo, el cálculo pascaliano de los indivisibles no cumplía algunas reglas ordinarias de la aritmética, como bien ha señalado Brunschvicg:[3] por ejemplo, la proposición que afirma que un indivisible, multiplicado tantas veces como se quiera por una cantidad, está tan alejado de sobrepasar una extensión dada que no puede formar sino uno solo y único indivisible. A partir de esta propiedad, Pascal asimiló el indivisible al cero de la aritmética, que como tal es un verdadero cero de la extensión.[4] Ello

---

[1] Belaval, 1986: 40.

[2] En 1993, Eberhard Konobloch publicó la edición crítica de un texto que Leibniz dejó en París en 1676 y que se creía perdido. Ese texto que Brunschvicg no conoció, se titula *Quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (Vandenhoeck-Ruprecht, Göttingen, 1993) y en él Leibniz ofrece una perspectiva novedosa sobre esta cuestión. Entre otras cosas corrige y pretende demostrar con rigor el "método de los indivisibles", haciendo ver la equivalencia existente entre un método indirecto de cálculo de cuadraturas y otro directo que utiliza los infinitamente pequeños. Esa idea de equivalencia constituye para Leibniz una sólida justificación del cálculo diferencial que trata de elaborar por entonces. *Cfr*., Parmentier, 2001: 53-54.

[3] *Cfr*., Brunschvicg, 1972: 168-169.

[4] *Cfr*., Brunschvicg, 1972: 169.

estaba en clara oposición a algunas leyes de representación espacial, como la que expresaba un plano por un número indefinido de líneas.

Por razones de orden extramatemático, el pensamiento de Pascal se movía entre la consideración de la división infinita como algo incomprensible y sin representación directa, y por otra parte, como un principio geométrico ineludible. La noción matemática de indivisible no es sino un reflejo de esa contradicción. El indivisible, como tal, no pertenece al terreno de las ideas matemáticas. Surge en el ámbito del razonamiento experimental y del *sentimiento*: sentimos que hay tres dimensiones en el espacio y que los números son infinitos; la razón demuestra después que no hay dos números cuadrados de los cuales uno sea el doble del otro. Para Pascal, desde dicho *lugar* se conocen los auténticos primeros principios, que conforman después la materia del razonamiento abstracto.

Un ejemplo que da cuenta del pensamiento de Pascal[5] es el siguiente: mientras el método de exhaución de los griegos se expresa y se representa en las figuras mismas, tal como aparecen a la mirada del geómetra, el método de los indivisibles, cuando trata de resolver los problemas de integración de una figura dada, recurre a la suma de infinidad de elementos que tienen una dimensión menos. Esta infinitud de elementos constituye un supuesto del razonamiento, que basta para configurar la práctica geométrica del nuevo método de lo indivisible. Este recurso no es escandaloso, según Pascal, para los que tienen el sentido (e inteligencia) de la geometría.

La práctica geométrica requiere tener el sentido de la infinitud. Por ello, sólo una experiencia específica, como el sentimiento religioso del cristiano con la acción de la gracia, o como una experiencia comparable a la obra experimental del físico, permite restablecer los verdaderos principios de la ciencia en una esfera superior al dominio de la razón. De ahí que la filosofía pascaliana de la matemática esté impregnada simultáneamente de misticismo y de *positivismo*, como subrayó Brunschvicg.[6]

Partiendo de estas concepciones filosóficas, Pascal retomó las directrices de la geometría de los indivisibles de Cavalieri, y por consiguiente, la consideración del infinito en geometría, así como su método de cálculo.

Cavalieri había inventado una nueva técnica para resolver un problema teórico general: la génesis de las figuras geométricas. Considerando la generación

[5] *Cfr*., Brunschvicg, 1972: 170.

[6] *Cfr*., Brunschvicg, 1972: 169.

del cono y del cilindro a partir del triángulo y del paralelogramo, y teniendo en cuenta que la superficie del paralelogramo es el doble de la del triángulo, supuestas la misma base y altura, Cavalieri observó la *anomalía* o desproporción de que el volumen del cono fuera un tercio del cilindro. Para corregir esta anomalía y buscar la proporción entre los dos sólidos y los elementos que los generan, propuso que éstos fueran considerados, no como el resultado de un corte que siguiera el eje del cono o del cilindro, sino de otro tipo de corte, por planos equidistantes y paralelos a la base. Ello implicaba el recurso a lo infinitamente pequeño, o a lo indivisible, conforme al espíritu arquimediano.

La nueva técnica de cálculo consistía en cuadrar o cubicar, partiendo de esos elementos característicos que se obtienen en las secciones paralelas a la base. Esta técnica tiene que ver de manera indirecta con la integración, sin llegar a serlo todavía, por que establece una relación entre magnitudes desconocidas y magnitudes conocidas aunque no determina una magnitud total respecto a las partes geométricas elementales que componen la figura. Como la suma de los elementos infinitamente pequeños de la figura no podía ser expresada de forma matemática, por carecer del instrumental analítico preciso, dicha técnica, pese a situarse, al principio, en el ámbito de lo continuo, en la práctica era reemplazada por la técnica de mostrar geométricamente la relación entre dos sumas infinitas de elementos finitos en número ilimitado, la cual sí podía ser expresada matemáticamente mediante figuras.[7]

La dificultad matemática surgía para Cavalieri desde el inicio del procedimiento analítico, porque ni las figuras ni los cuerpos, así concebidos, eran una yuxtaposición de planos, ni los planos de líneas, ni las líneas de puntos. En este sentido, los elementos de las figuras o de los cuerpos eran indivisibles. Como los principios de la geometría de Euclides eran los puntos, las rectas, las líneas y los planos, la nueva geometría de los indivisibles se encontraba con una importante dificultad conceptual.

Veamos el problema general con un ejemplo. La razón entre el cono y el círculo podía hallarse si se podía encontrar la razón entre la *suma* (agregado) de todos los círculos decrecientes en el cono (infinitos en número) y la *suma* de todos los círculos iguales del cilindro (cuyo número es también infinito). En el caso del cono, estos círculos son decrecientes desde la base hasta el vértice y forman una progresión aritmética, la de los cuadrados de los términos. En el caso

[7] *Cfr*., Brunschvicg, 1972: 164.

de otros cuerpos se obtendrían progresiones diferentes. El método general consistía en establecer la relación entre esta *suma* de términos crecientes o decrecientes y la *suma* de los términos iguales que forman la figura uniforme y conocida de la misma base y altura.[8]

Este método, a pesar de recurrir en principio al infinito, en última instancia lo eliminaba. Sin embargo, se mantenía en el ámbito de la intuición geométrica y de la representación de lo continuo. En definitiva, la figura era presentada como una figura completa, compuesta por esos elementos indivisibles.

El nudo del problema teórico generado por la geometría de los indivisibles consistía en el paso de entidades unidimensionales a entidades bidimensionales, al sustituir un elemento lineal por un elemento superficial: para mayor complicación, éste último podía tener forma cuadrada, circular, etcétera, según se tratara de conos, pirámides, etcétera; pero el paso determinante era la sustitución de una línea por una superficie. Por consiguiente, al considerar un área como una suma de rectas se estaba razonando entorno a figuras finitas del espacio sobre la base de considerarlas formadas por elementos infinitamente pequeños.

Pascal advirtió que este recurso a lo infinitamente pequeño estaba en la base del método de Cavalieri. Al estudiar a fondo la cicloide (*roulette*) y sus problemas derivados (naturaleza de la curva, cuadratura total de su área, volumen, centro de gravedad, etcétera), Pascal fue el primero que, según Brunschvicg, introdujo los principios básicos del *análisis infinitesimal*, a pesar de que en sus cálculos no manejaba de forma explícita la noción de infinito. Para ello, determinó, de manera rigurosa, los límites de las sumas de un número infinitamente grande de cantidades infinitamente pequeñas, resolviendo a la vez los problemas de los diferentes tipos de integración a base de calcular volúmenes geométricos. La noción pascaliana equivalente a la de integral venía dada por la suma de líneas, planos y senos, y el método de integración tenía su equivalente en las sumas piramidales.[9] Su método, directo y geométrico, le dispensaba de la necesidad de buscar un algoritmo, tarea ésta que ocupó específicamente a Leibniz.

En efecto, con ocasión de la lectura de uno de los tratados geométricos de Pascal, Leibniz tuvo una primera intuición de su concepto de diferencial, de manera concreta, en la figura del triángulo característico, supuesto infinitamente

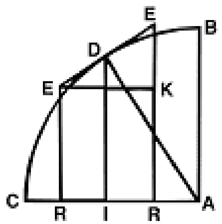
[8] Koyré, 1977: 153.

[9] Pascal, 1954: 275.

pequeño, que encabeza la figura del lema del “*Traité des sinus du quart de cercle*”. El lema dice así:

Lemme

> *Soit ABC un quart de cercle, dont le rayon AB soit considére comme axe, et le rayon perpendiculaire AC comme base; soit D un point quelconque dans l’arc, duquel soit mené le sinus DI sur le rayon AC; la touchante DE, dans laquelle soient pris les points E où l’on voudra, d’où soient menées les perpendiculaires ER sur le rayon AC; je dis que le rectangle compris du sinus DI et de la touchante EE’, est egale au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les paralleles) et le rayon AB.*
>
> *(Demostration) Car le rayon AD est au sinus DI*



> *comme EE’ à RR’ ou EK: ce qui paraît clairement à cause des triangles rectangles et semblables DIA, EKE’, l’angle EE’K ou EDI etant égal à l’angle DAI.*[10] (Pascal, 1954: 173-179)

[10] “Siendo ABC un cuarto del círculo cuyo radio se considera el eje, y el radio perpendicular AC la base; siendo D un punto cualquiera del arco, desde el cual se traza el seno DI sobre el radio AC; siendo también la tangente DE, en la que se toman, así mismo, donde se quiera los puntos E, a partir de los cuales se trazan las perpendiculares ER sobre el radio AC; digo que el rectángulo comprendido entre el seno DI y la tangente EE es igual al rectángulo comprendido por la porción de la base (comprendida entre las paralelas) y el radio AB. (Demostración) Porque el radio AD es al seno DI como EE´ es a RR´ o EK, lo cual es claro porque los triángulos rectángulos DIA, EKE´ son semejantes y porque el ángulo EE´K o EDI es igual al ángulo DAI” (la traducción es mía).

Pascal retomó la geometría de los indivisibles precisamente respecto del triángulo EKE', con el fin de demostrar el lema anterior: la suma de las perpendiculares trazadas desde la base es igual a la porción de la base comprendida entre los senos extremos multiplicados por el radio. La misma figura dio ocasión a Leibniz para avanzar hacia la conceptualización de la noción de diferencial.

En efecto, al considerar ese triángulo como infinitamente pequeño, los puntos E y E' podían ser infinitamente próximos, y por consiguiente, los lados del triángulo EKE' podían ser tan pequeños como se quisiera, sin por ello dejar de ser semejante EKE' al triángulo DIA, formado por el radio en el punto de la tangente y la perpendicular construida desde la base a ese punto. Esta iluminación súbita de Leibniz, que él relata en un escrito ulterior titulado *Historia et Origo Calculi differentialis* (1714), le permitió tratar ese triángulo característico como un elemento constitutivo de la curva. Esta estaba formada por una parte infinitamente pequeña de la tangente y las porciones infinitamente pequeñas de las paralelas a la abcisa y a la ordenada. Así, Leibniz superaba las limitaciones de la geometría de los indivisibles, la cual, ante la imposibilidad de evaluar la suma finita de elementos infinitamente pequeños, prefería establecer la conexión infinita de cantidades finitas (percibidas por la intuición) que fueran indivisibles, lineales o superficiales, pero cuya suma (infinita) debía representar una figura (finita). Esto implicaba, forzosamente, una heterogeneidad entre los elementos de las sumas y las sumas mismas, como concluye Brunschvicg en su texto:

> *La considération du "triangle caracteristique" est le premier pas fait par Leibniz en dehors de la méthode vulgaire des indivisibles. Au point de vue théorique cette consideration permet de rétablir l´homogeneité, rompue en apparence par les sous-entendus de Cavalieri, entre les éléments des sommes et les sommes elle-mêmes.*[11] (Brunschvicg, 1972: 173)

En efecto, como dice nuestro autor, es mediante el triángulo característico como reaparece el problema de la *homogeneidad*, al entenderse que las superficies están compuestas de pequeñas superficies y las líneas de pequeñas líneas.

[11] "La consideración que Leibniz hizo del "triángulo característico" supuso su primer paso más allá del método vulgar de los indivisibles. Desde el punto de vista teórico, esa consideración permite restablecer la homogeneidad, rota en apariencia por los supuestos de Cavalieri, entre los elementos de las sumas y las sumas mismas" (la traducción es mía).

Ello implica que, con respecto al ámbito de lo infinitamente pequeño, las relaciones se conservan al pasar de lo finito a lo infinitesimal, precisamente porque se trata con magnitudes homogéneas. El tipo de similitud que se concibe no depende ya, por tanto, de que las magnitudes estén dadas, y de esa manera lo exacto entra con pleno derecho en el ámbito de lo infinitesimal.

Algunos de los resultados obtenidos por esta técnica inventada por Leibniz ya eran conocidos por Christian Huygens, y habían sido expuestos cinco años antes mediante el método de las tangentes de Isaac Barrow (1670). Pero Leibniz fue más allá, al dejar abierta la posibilidad de que las diferenciales generaran la suma total (o integral), a la vez que podía darse el paso inverso. Esta posibilidad ya había sido anunciada en el problema conocido como de Beaune, o problema de la inversa de las tangentes, que guarda analogía con los problemas clásicos de cubicación y cuadraturas.

Pero a Leibniz no le bastaba con poder obtener resultados, fueran nuevos o ya conocidos, mediante su nuevo método. Estas nuevas técnicas matemáticas habían de ser *justificadas*. En realidad, debían obtener un estatuto lógico concreto dentro del proyecto general leibniciano de la Característica Universal. Al tratar de afrontar esta exigencia Leibniz fue mucho más allá en el desarrollo de sus concepciones, inventando un auténtico procedimiento de cálculo, basado en un algoritmo combinatorio. En esto radica la auténtica aportación de Leibniz, como veremos a continuación.

La geometría infinitesimal leibniciana pudo consolidarse gracias a su gran generalidad y simplicidad, y no sólo por su capacidad para resolver problemas concretos, fuera de matemáticas o de física. Para ello, Leibniz no sólo tuvo que afrontar problemas matemáticos, sino también importantes cuestiones filosóficas.

CONTEXTO CONCEPTUAL E HISTÓRICO DEL *NOVA METHODUS*

El nuevo método de cálculo se caracteriza sobre todo por su capacidad para dar cuenta analíticamente de todos los elementos del problema de forma simple y general. Permite el paso inteligible de una ecuación ordinaria a una ecuación diferencial, haciendo corresponder a la relación de cantidades finitas Dx/Dy la relación dx/dy de cantidades infinitesimales.[12] La explicitación de esta problemática por medio de la correspondencia entre la relación Dx/Dy de cantidades fini-

[12] *Cfr*., Brunschvicg, 1972: 174-175.

tas y la relación dx/dy de cantidades infinitesimales se establece por un cálculo de diferencias y sumas, que unida a las cuatro operaciones de la aritmética, así como a la interpretación de signos y la diferencia de potencias y de raíces, constituye el algoritmo diferencial leibniciano del *Nova Methodus*.

Esta explicitación es el resultado de una nueva concepción filosófica, que no considera a las magnitudes infinitesimales como ceros, ni tampoco como si fueran en rigor infinitamente pequeñas. Leibniz, como recuerda Brunschvicg, escribe a Tournemire en 1714 acerca de la naturaleza de los infinitesimales, diciéndole que este tipo de cantidades son incomparables, o indefinidamente pequeñas, y que di-fieren de forma continua entre sí:

> *Au lieu de prendre les grandeurs infinitésimales pour 0, comme Fermat, Descartes, et même Newton* [...], *il faut supposer que les grandeurs sont quelque chose, qu´elles diffèrent entre elles, et qu´elles soient marqueés de différentes manières dans l´analyse nouvelle* [...] *Je les prends donc, non pas comme riens, ni même pour des infiniment petits à la rigueur, mais pour des quantités incomparablement ou indéfiniment petites, et plus que d´une grandeur donnée, ou assignable, inférieures à d´autres dont elles font les différences, ce qui rend l´erreur moindre qu´aucune erreur assignable ou donnée et par conséquent elle est nulle.*[13]

El concepto que subyace y en el que se apoya el algoritmo es el de magnitud variable, pero sólo en tanto que la variación misma es expresión de las diferencias, o mejor, de las diferencias de las diferencias de varios grados, que como tales son recíprocas a sus sumas. Esta reciprocidad es similar a la que hay entre las raíces y las potencias. La novedad reside en que el análisis leibniciano del infinito no depende ya de las figuras cuya suma se buscaba, sea mediante las

---

[13] Carta de Leibniz a Tournemire en 1714, en *G.W. Leibnitii Opera Omnia* , ed. L. Dutens, vol. III, p. 442. “En lugar de estimar las magnitudes infinitesimales como 0, tal como hacen Fermat, Descartes, e incluso Newton [...], es necesario suponer que esas magnitudes son algo, que difieren entre sí y que en el nuevo análisis pueden señalarse de diferentes maneras [...] Yo no las considero, por consiguiente, como nada, ni siquiera como infinitamente pequeñas en un sentido riguroso, sino como cantidades incomparablemente o indefinidamente pequeñas, y más que una magnitud dada, o asignable, inferiores a otras de las que son las diferencias, lo cual hace que el error sea menor que ningún error asignable o dado, y en consecuencia sea nulo” (la traducción es mía).

ordenadas (indivisibles de Cavalieri), sea mediante la inducción de series de números (Juan Wallis).

Este descubrimiento leibniciano de un análisis matemático general, que se sintetiza en el algoritmo diferencial del *Nova Methodus*, se logró en primer lugar a base de superar diversas dificultades técnicas, en parte gracias a la escuela inglesa de Barrow, cuyos resultados fueron mejorados. Por otro lado, al operar con series infinitas Leibniz retomó las ideas básicas de Pascal (1665) acerca de las relaciones entre los cálculos aritméticos y el cálculo de los indivisibles.

Con su artículo *Nova Methodus* (1684), gestado desde su época de París (1675), y gracias a sus investigaciones acerca del triángulo característico, Leibniz propuso un nuevo algoritmo matemático para tratar de manera conjunta problemas muy diversos. No obstante, es importante tener presente que dicho texto forma un cuerpo único con los principios metafísicos del leibnicianismo, y que es con esa mirada como debemos acercarnos a sus textos matemáticos, cuestión que trataré de perfilar en el último apartado.

Pero antes de pasar a ello y de estudiar los comentarios de Ishiguro, es importante tener presente que el artículo donde Leibniz desarrolló los principios fundamentales del cálculo diferencial, hoy en día tan famoso, en su época fue acogido con una indiferencia generalizada y no fue comprendido por sus contemporáneos. En ello influyeron varios factores: por un lado, la presentación poco intuitiva y puramente combinatoria elegida por Leibniz; y por otra parte, la propia dificultad del nuevo concepto de diferencial, así como, al parecer, una serie de accidentes tipográficos, y otros. Todo ello dio lugar a un texto de difícil intelección. En la medida en que este texto no debía superar la extensión de un artículo, Leibniz no podía sino *ocultar* las raíces de su nuevo método. Sea como fuere, sólo lectores como los hermanos Bernouilli (a partir de 1687), y posteriormente Guillaume F. A. M. de L'Hôpital y Pierre Varignon llegaron a comprender este artículo y las memorias posteriores de Leibniz. Hasta el mismo Huygens no llegó a entender, de forma plena, el proyecto leibniciano.

Las investigaciones de Yvon Belaval sobre el papel del cálculo infinitesimal en el sistema leibniciano le hacen pensar, siguiendo a Dietrich Mahnke y a Brunschvicg, que las raíces del algoritmo diferencial se remontan a los primeros trabajos de Leibniz y, en concreto, a la *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666), en la que ya se apuntaba su proyecto de una Característica Universal. En esa memoria juvenil Leibniz afirmaba que las matemáticas y su estudio eran un medio para progresar en el arte de razonar, el cual depende de la lógica, es decir, de un arte superior. Así y desde esa perspectiva, la característica combinatoria se convierte en el motor del *logicismo* leibniciano de las matemáticas, y su resultado inmediato es la creación de una matemática puramente simbólica. En ese sentido, lo novedoso del cálculo infinitesimal estriba en que está sometido a un algoritmo estrictamente formal y que como tal ese algoritmo constituye sólo una expresión concreta, y una etapa del proyecto universal de la Característica Universal. Estas ideas acerca de la verdadera lógica y las matemáticas tienen un fundamento estable al afirmarse que la esencia del pensamiento es el cálculo y que pensar es calcular. Pero como se decía más arriba, esa idea de la finalidad de las matemáticas, y por tanto del cálculo, se enmarca en lo que Leibniz llama la *vraie logique*. Cuestión esta que Belaval deja clara recurriendo a un texto de Leibniz acerca de esa época del *Arte Combinatoria* (carta a Gabriel Wagner, finales de 1696), y luego a otros importantes textos de historiadores del leibnicianismo como Brunschvicg, Mahnke, Couturat. Escribe Belaval:

> *Au vrai, la mathématique pure (mathesis pura) n´est pas la logique (Vernunftlehre) en soi, mais une de ses premières nées, elle en représente en quelque sorte l´emploi avec la grandeur, c´est-à-dire le nombre, la figure, le poids* [...] *La superiorité de mon calcule infinitésimal vient de la logique. Sans jamais renier cette logique,* escribe Belaval comentando ese texto, *Leibniz aspire à la perfectionner. L´élaboration du De Arte Combinatoria l´oriente vers la Caractéristique. Et Léon Brunschvicg explique fort bien:*
>
> *La base historique du leibnizianisme doit être cherechée là où la caractéristique a inmédiatement réussi à manifester sa vitalité et sa fecondité, c´est-à-dire dans l'établissement de l´ algorithme différentiel.*
>
> *Dietrich Mahnke est encore plus précis* [continua Belaval] *Et ici, maintenant, cette pensée de Caractéristique combinatoire devenait la source des idées leibniziennes vers la logification complète de la mathématique d´une part, et, d'autre part, vers la création d´une mathématique symbolique à côté de la mathématique formelle née de la logification.*
>
> [Para finalizar con una cita de Couturat:] *C´est là ce qui constitue le mérite essentiel de l´invention de Leibniz, et son principal avantage sur la méthode des fluxions de Newton. On peut donc dire que le Calcul infinitésimal n´est*

> *qu´un échantillon, le plus illustre et le plus réussi, de la Caractéristique universelle.*[14] (Belaval, 1986: 42)

Pero volviendo al tema de la incomprensión e indiferencia con la que fue recibido el *Nova Methodus*, hay que recordar que el tratamiento del infinito en la geometría, como en general la escena matemática del siglo XVII, estaban marcados por nombres como Cavalieri, Pierre Fermat y Florimond de Beaune, entre otros. Ello determinó que pocos matemáticos de aquella época entendieran el significado y el alcance del nuevo cálculo, el cual investigaba lo infinito a partir de las diferencias de diversos órdenes de infinitos y consideraba lo infinitamente pequeño como variación.

Sin embargo, es importante subrayar que la originalidad del algoritmo leibniciano para el cálculo infinitesimal depende de esta metafísica de la diferencia. En efecto, la nueva noción leibniciana de lo infinitamente pequeño permitió que en un problema cualquiera pudiera descenderse de manera progresiva a las diferenciales de grado infinito (dxdy, ddx ddy, etcétera), cuestión ampliamente incomprendida por los lectores del *Nova Methodus*.

En efecto, en aquel contexto histórico muchos pensaban, siguiendo a Pascal, que sólo se podía acceder a lo infinitamente pequeño a partir de la inmensidad del creador. Se buscaba en todo caso un testimonio concreto que confirmara esta

---

[14] "En realidad, la matemática pura (*mathesis pura*) no es la lógica (*Vernunft-lehere*) en sí misma, sino uno de sus primeros resultados, la representa de alguna manera mediante el uso de la magnitud, es decir, el número, la figura, el peso [...]. La superioridad de mi cálculo infinitesimal proviene de la lógica. Sin renegar nunca de esa lógica, *escribe Belaval comentando ese texto*, Leibniz aspira por el contrario a perfeccionarla. La elaboración de Arte Combinatoria le orienta hacia la Característica. Y León Brunsvicg lo explica muy bien: La base histórica del leibnizianismo debe buscarse allí donde la característica mejor ha manifestado de forma inmediata su vitalidad y fecundidad, es decir, en el establecimiento del algoritmo diferencial. Dietrich Mahnke es más preciso, [*continua Belaval*]: Y aquí y ahora, ese pensamiento sobre la Característica combinatoria se convierte en el origen de las ideas leibnizianas sobre, por una parte, el completo logicismo de las matemáticas, y por otra, sobre la creación de una matemática simbólica al lado de la matemática nacida del logicismo. [*Para finalizar con una cita de Couturat*]: En eso consiste el mérito esencial de la invención de Leibniz y su principal ventaja sobre el método de fluxiones de Newton. Por lo tanto, puede decirse que el cálculo infinitesimal es un eslabón, el mejor logrado e ilustre de la Característica Universal" (la traducción es mía).

vinculación entre Dios y lo infinitamente pequeño. Así, por ejemplo, se debatía acerca de la posibilidad de la existencia de los átomos. Este modo de pensar en el ámbito físico no aportaba una representación adecuada para adentrarse en los vericuetos del infinito y de lo infinitesimal. Frente a esa actitud, Leibniz, quien en el curso de su carrera había superado rápidamente diferentes etapas (atomismo, filosofía corpuscular), acabaría concluyendo que los "verdaderos átomos de la naturaleza" son las substancias simples o mónadas, que desde la perspectiva de lo uno y lo múltiple dan cuenta de los laberintos del infinito. Esas etapas a las que aludo, no son sino fases de su formación que el propio Leibniz nombra en su *Monadologie*, y que deben interpretarse como una progresiva maduración expresiva de su idea básica de la existencia real de un infinito actualmente infinito y no la abstracción de un infinito en potencia que se confunde con la inmensidad del ser.

Pues bien, la invención leibniciana del cálculo diferencial constituye un hito importante en este marco histórico y dentro de su propia trayectoria intelectual, tanto porque zanjó varios problemas matemáticos importantes como porque permitió evitar algunas controversias metafísicas en torno a los fundamentos del cálculo, haciendo que autores como George Berkeley tomaran una postura pragmática respecto a ese tema. En efecto, la posición de Berkeley es un ejemplo relevante en lo referente a esa reflexión, que marcará el siglo XVIII hasta el advenimiento de *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* de Lazare N. M. Carnot en 1797.

Sin duda, Berkeley[15] reconoce el valor práctico del cálculo infinitesimal lo cual no le impide, sin embargo, interrogarse acerca de su naturaleza y en consecuencia acerca de las cantidades infinitamente pequeñas. En este sentido, es interesante ver cómo los presupuestos filosóficos orientan esa reflexión sobre el infinito, y como botón de muestra valga el opúsculo titulado *Of Infinities* (Comunicación de 1707 a la Dublin Philosophical Society, Molyneux Papers) en el que expone sus ideas sobre el infinito, aunque con una mayor influencia de John

[15] El principal material de su reflexión sobre el infinito aparece en su famoso opúsculo de título revelador *The Analyst, or, A discourse addressed to an infide* (1734), aunque encuentre ya prefigurado en su perspectiva epistemológica en su *Treatise concerning the Principles of Human Knowledge* (1710, segunda edición de1734 y en la que se supone que ese opúsculo iba a constituir la cuarta parte). El texto *Of infinites* al que me refiero a continuación está en la edición de Luce y Jessop, vol. IV, pp. 235-238. También en Berkeley, 1982, que es la que cito.

Locke que la manifestada en su *Treatise concerning the Principles of Human Knowledge*.

Berkeley parte en ese texto de la convicción de que el correcto uso de un término está en asegurarse de que le corresponda una idea y de acuerdo con esto, citando a John Locke, piensa que la representación del infinito se forma mediante la operación de repetición de continuas adiciones. Ese esquema se impone, como es natural, en el ámbito de lo perceptivo visual y de la geometría sobre la aritmética, sin pretender con ello separar la segunda de la primera como trató de hacer Wallis (*Arithmetica Infinitorum*). Sin embargo, el infinito actual, que para Locke es irrepresentable pero clave en la filosofía de Leibniz y del algoritmo que inventó, conlleva para Berkeley el estigma de la contradicción al ser una idea que no puede ser comprendida de golpe, puesto que existiría pero sin ser percibida (espacialmente).

Difícil tarea en efecto esa, incluso para abordar el cálculo newtoniano de "fluxiones" que examina en el parágrafo octavo de su *The Analyst*. Porque tanto las "fluxiones" como los infinitesimales del cálculo diferencial, cualesquiera que sea su orden, se justifican por el manejo de nuevos símbolos matemáticos cuyo contenido tienen, para un "empirista" como él, una dudosa correspondencia con imágenes sensibles. En *Of Infinities* esa idea aparece también de manera clara, pero articulándose en la distinción entre la idea de la infinidad del espacio y la irrepresentabilidad de un espacio infinitamente pequeño, o infinitamente grande, es decir, de *partes infinitesimae* de cantidades finitas. Berkeley no admite la existencia de *partes infinitisimae*, y menos todavía de *infinitesimae infinitesimarum*, entre otras, lo cual hace pensar a Alexandre Koyré en su obra *Cavalieri et la géométrie des continus* que, sin embargo, sí admite los indivisibles, aunque sin aceptar que haya una infinidad de ellos en una longitud finita, tal como indica el método de Cavalieri.

Sea como fuere, lo cierto es que Berkeley señala las contradicciones que supone aceptar y trabajar con cantidades infinitesimales e invisibles de las que no tenemos ideas y acerca de las que, por tanto, en un sentido estricto no cabe razonar. El error sólo surge cuando esos infinitesimales que son nada (*nought*), que no hacen ni bien ni mal, son tomados por algo y surge la contradicción *(Now a man speaking of lines infinitely small will hardly be suppos´d to mean* *nothing by them, and if he understands real finite quantitys he runs into inextricable difficultys).*[16]

La referencia a la controversia entre Leibniz y Bernard Nieuwentijt a propósito de la naturaleza de los infinitesimales, y a la cual me referiré un poco más adelante, le permite a Berkeley matizar su pensamiento. En concreto, cita la respuesta de Leibniz a su interlocutor publicada en los *Acta eruditorum* en 1695, el cual sólo acepta como cantidades reales los infinitesimales de primer orden y rechaza las *differentiae differentiarum* que las considera como ceros; Leibniz está de acuerdo con Nieuwentijt en el criterio de que dos cantidades son iguales cuando no hay ninguna diferencia entre ellas, pero además Leibniz añade que también son iguales aquellas cantidades cuya diferencia es tan pequeña que es incomparable. Berkeley rechaza, como lo hará también en la polémica que seguirá a *The analyst,* las ideas de Leibniz acerca de la incomparabilidad y también entorno a la inasignabilidad.

En *Of infinites,* texto que es considerado como un eco de los debates acerca de los infinitesimales en la Academia de las Ciencias a partir de 1700, puede observarse que la clave concreta de la cuestión radica en el rechazo de Berkeley a utilizar la geometría y las figuras geométricas como símbolos del continuo aritmético:

> *But if lines are infinitely divisible, I ask how there can be any such thing as a point? Or granting there are points, how can it be thought the same thing to add an indivisible point as to add, for instance, the* differentia *of an ordinale in a parabola, which is so far from being a point that it is itself divisible into an infinite number of real quantitys whereof each can be subdivided* in infinitum*, and so on according to Mrs. Leibnitz.*[17] (Berkeley, 1982: 49-51)

[16] Berkeley, 1982: 48. "Es dificil pensar que alguien que hable de líneas infinitamente pequeñas no quiera decir nada con ello, pero si se refiere a cantidades finitas reales está cayendo en dificultades inextricables" (la traducción es mía).

[17] "Pero si las líneas son divisibles al infinito, yo me pregunto ¿cómo puede existir un punto? O, si se admite la existencia de puntos, me pregunto cómo se puede pensar que sea la misma cosa añadir un punto indivisible y añadir por ejemplo la *differentia* de una ordenada en una parábola, diferencia que es por poco un punto ya que como tal es divisible en un número infinito de cantidades reales, cada una de las cuales puede ser a su vez subdividida in *infinitum* y así a seguidamente, al menos si creemos al Sr. Leibniz" (la traducción es mía).

Berkeley señalará, apoyándose en la filosofía de Locke y también en cierta ambigüedad del lenguaje de Leibniz,[18] las contradicciones que supone la introducción de los infinitesimales (magnitudes actuales que no son ni finitas ni nulas) cuya naturaleza se desconoce y del infinito (no tenemos idea que lo represente) en los nuevos procedimientos matemáticos. Sin embargo, su posición es un elemento muy útil para comprender el alcance de la problemática filosófica del nuevo cálculo que, en ausencia de una noción clara de infinitesimal, su aceptación en general será meramente práctica ante el estupor de que de premisas falsas se deducen fórmulas verdaderas.

EL ALGORITMO LEIBNICIANO Y LA INCOMPARABILIDAD DE LOS INFINITÉSIMOS, SEGÚN ISHIGURO

La noción clave del cálculo infinitesimal leibniciano es, según Ishiguro, la de lo incomparable. Sería el uso contextual de esa noción, por ejemplo, para explicar el infinito, o de la de infinitesimal también, lo que permite dar de ellas una definición (contextual), es decir, en la que no designa una entidad fija y determinada, sino que por el contrario la noción se define mediante las proposiciones donde figure. Esa idea de fijar el sentido de las definiciones por el uso contextual de las nociones, rememora una práctica leibniciana consistente en experimentar siempre con nuevas definiciones, de tal modo que éstas se muestran y se perfilan como algo dinámico al menos hasta que no se llegue al conocimiento perfecto de la naturaleza de la cosa (principio de identidad).

En todo caso y respecto a nuestro tema es cierto que, el propio Leibniz, refiriéndose a su descubrimiento de las cantidades infinitesimales, llegó a hablar expresamente de un *Algoritme des incomparables*. En una carta dirigida a Varignon en febrero de 1702, respondiendo a una aclaración que éste había solicitado sobre su expresión "*infiniment petit*", Leibniz escribe:

> [...] *mon dessin a esté de marquer qu'on n'a point besoin de faire dépendre l'analyse mathématique des controverses métaphysiques, ni d'asseurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniement petites à la rigueur, ou (en) comparaison des notres* [...]*; d'autre part il m'a paru que l'infini pris à la*

[18] Esta cuestión relativa a la ambigüedad expresiva de Leibniz en la utilización de la geometría en relación con el continuo aritmético es tratada por Belaval, 1960.

> *rigueur doit avoir sa source dans l'interminé, sans quoi je ne vois pas des moyens de trouver un fondement à le discerner du fini. C'est pourquoi a fin de eviter ces subtilités, j'ai cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisait d'expliquer ici, l'infini par l'incomparable, c'est à dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les notres; ce qui fournit autant qu'on veut de degrés d'incomparables. Puisque ce qui est incomparablement plus petit, entre inutilement en ligne de compte à l'egard de celui qui est incomparablement plus grand que lui.*[19]

Hay que tener presente que este texto es del año 1702, y apunta de manera ya consolidada a la idea de que cuando habla de un infinitesimal hay que tener presente que Leibniz está pensando en una magnitud variable y no una magnitud fija. La evolución de esa noción es manifiesta si nos retrotraemos a su primer texto acerca del cálculo de 1684, el *Nova Methodus*, en el que todavía utilizaba un término usual en la época, *infinite parva*, para designar el de infinitesimal. En ese texto[20] describía la tangente como una línea recta entre dos puntos a una distancia infinitamente pequeña de una curva, pero en esa descripción la noción de diferencial estaba definida sin la ayuda del infinitesimal.[21] Pero nos dice Ishiguro que a partir de 1695, en la ya aludida carta a Nieuwentijt, Leibniz da a entender que los infinitésimos son en realidad entidades teóricas y de hecho da pruebas de que los utiliza como tales. Por ejemplo, maneja los infinitésimos en el caso de los segmentos infinitamente pequeños de una línea, así como para sus cuadrados

---

[19] Leibniz, *Leibnizens matematische Schriften*, ed. Gerhardt , 7 vol. reimpresión Hildesheim, 1961./Abrev. (*G.M.) G.M*. IV. pág. 91. "[...] he querido mostrar que no es necesario hacer depender el análisis matemático de controversias metafísicas, y asegurar que no hay en la naturaleza líneas infinitamente pequeñas en un sentido riguroso o (en) comparación con las nuestras [...]; por otro lado, siempre me ha parecido que el infinito tomado rigurosamente debe tener su origen en lo inacabado, sin lo cual no veo otros medios para encontrar un fundamento para discernirlo de lo finito. Por eso, para evitar esas sutilezas y hacer el razonamiento accesible a todo el mundo, bastaba con explicar aquí el infinito por lo incomparable, es decir, mediante la concepción de cantidades incomparablemente más grandes o más pequeñas que las nuestras; esto proporciona tantos grados de incomparables como se quiera. Ya que lo que es incomparablemente más pequeño, no se toma en cuenta en relación de lo que es incomparablemente más grande que él" (la traducción es mía).

[20] *Cfr*., Leibniz, 1987.

[21] Ishiguro, 1986: 185.

y sus cubos, considerando esos infinitésimos como auténticas cantidades que no pueden eliminarse, porque son "útiles para el razonamiento y el descubrimiento".[22]

En ese contexto de una respuesta amplia a Nieuwentijt que sólo acepta la existencia de los infinitesimales de primer orden, Leibniz se refiere a la incomparabilidad diciendo que la magnitud de un segmento de una curva y su diferencial (que corresponde a una tangente), no son *cantidades homogéneas* y no pueden ser comparadas absolutamente una respecto a la otra. Cuando falta la homogeneidad arquimediana entre dos tipos de magnitudes (por ejemplo velocidad y aceleración), Leibniz pasa hablar mejor de incomparabilidad, puesto que lo propio en esos casos de heterogeneidad entre magnitudes es que no se pueden sumar y sustraer cantidades, o si se prefiere al revés. La definición que sustenta esa noción, recuperada con escándalo por Berkeley, dice: "*Quemadmodum si lineae punctum allerius lineae addas quantitatem non auges*".[23]

En definitiva, el criterio geométrico de la incomparabilidad consiste en decir que por mucho que se multiplique una longitud por un número finito cualesquiera no se obtiene una superficie plana, y en consecuencia, esas cantidades son realmente incomparables. Luego, tampoco se puede construir una figura geométrica que corresponda al incremento de un segmento de una curva por su diferencial, como constata Leibniz en la misma carta. En ningún caso se trata, pues, de concebir la incomparabilidad de cantidades muy pequeñas existentes en un sentido absoluto.

El contenido de los textos[24] utilizados por nuestro comentarista para desbrozar el sentido contextual de la noción de incomparabilidad, va en esa dirección. Su aproximación pasa por el reconocimiento del modo en que se manifiesta la propiedad de incomparabilidad ("en el caso del diferencial es ser incomparablemente más pequeño que ninguna cantidad otra dada", le dice a L´Hôpital), y también por el hecho de que los diferenciales, se trate del orden del que se trate,

[22] Carta de Leibniz a B. Nieuwentijt en 1695 /Responsio ad nonnullas dificultates an. Bernardo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitisimalem motas/ en *Leibnizens matematische Schriften*, ed. Gerhardt , 7 vols. reimpresión Hildesheim, 1961./Abrev. (*G.M.)*/ t. V., p. 321.

[23] Berkeley, 1982: 48. "De tal manera que si se añade a una línea un punto de otra, no aumenta la cantidad" (la traducción es mía).

[24] Cartas de Leibniz a Nieuwentij el año 1695; el 14 y 24 de junio a l´Hôpital, también en 1695, G.M., II, p. 288. Cartas a Bernouilli, J., julio 1698, G.M., III, p. 551 y en febrero de 1699, G.M., III, p. 577.

sean considerados como magnitudes ("magnitudes incomparables son aquellas que una de ellas multiplicada por un número finito cualquiera no puede exceder a la otra"). Aunque en realidad lo que suceda es que es la derivada de una función en un punto, diríamos hoy, lo que es incomparable con la magnitud del intervalo correspondiente a dos valores de la función.

La otra cara de la moneda, y por tanto, complementaria de la incomparabilidad, consiste en cómo justificar que se ignoren las cantidades muy pequeñas que se han manejado para obtener un resultado, es decir, las magnitudes infinitesimales que Leibniz decía que no eran ni finitas ni nulas. En este sentido, la reflexión de Ishiguro reside en subrayar que él la llama incomparabilidad arquimediana, y Leibniz euclidiana (ausencia de homogeneidad entre magnitudes), no es el mejor medio para justificar la eliminación de los infinitésimos; es decir, esas cantidades muy pequeñas que Leibniz había utilizado en el curso de sus investigaciones, y que le habían permitido obtener resultados concretos.

El pensamiento de Leibniz se irá precisando, en el sentido de que esas entidades teóricas llamados infinitesimales y que figuran en las series matemáticas, son magnitudes que no existen físicamente en la naturaleza, ni tampoco pueden existir porque no son ni finitas ni nulas y, además, no son posibles. Sin embargo, en su sentido matemático principal, esos infinitesimales pueden existir mientras no se demuestre lo contrario como le sugiere Leibniz a Bernouilli (1698), sugerencia ésta que incluye implícitamente una exigencia que Leibniz plantea por doquier. En efecto, y sin entrar en más profundidades para no perder de vista el tema, valga con decir que para él la existencia de algo no depende de la imagen de ese algo, sino de la demostración de la posibilidad de su existencia. Así, es imposible tener la idea del mayor de todos los círculos o del número de todas las unidades posibles, y a pesar de que hay demostración de ello (son contradictorias) inevitablemente las pensamos.[25]

Hecha esa advertencia respecto a la posibilidad de la existencia de los infinitesimales, posibilidad que no está ligada a su imagen sensible, es necesario

[25] Un ejemplo de esto puede encontrarse en una carta a la princesa Elisabeth de 1678, en la que Leibniz, a propósito de las carencias de la demostración de la existencia de Dios de Descartes, muestra que aunque tengamos una idea sin imagen que incluya como en este caso la presunción de su existencia, esto no basta y hay que demostrar primero que esa idea de Dios es posible para poder conocer lo que encierra en tanto que es el principio de todos los conocimientos. Texto en español en Leibniz, 1989: 49-57.

decir que la noción de infinitesimal no debe ser comprendida como un término último de una serie. O dicho de otra manera, la multitud infinita (infinidad de términos decrecientes) no debe ser concebida como un número o totalidad, porque del cálculo no se sigue que debe haber un término infinitesimal definitivo. Por tanto, la incomparabilidad apunta a la variación infinita de la magnitud, que sólo en un momento dado y concreto puede ser tomada como una cantidad finita más pequeña que otra dada y provisionalmente compararse con ella; esta operación, en cuanto postulado de existencia de esa magnitud finita (diferencial), sólo le afecta a esa misma magnitud.

Por todo ello, el texto de Leibniz a Varignon en febrero de 1702 citado antes, es ilustrativo para comprender la expresión *infinitamente pequeño*, porque muestra que la existencia de esas cantidades *infinitamente pequeñas* no puede ser tomada en términos absolutos, lo cual es de la máxima importancia. Por eso Leibniz utilizó la noción de incomparabilidad para explicar el infinito, distinguiéndolo al contrario de Berkeley de la idea de infinidad. Estableció que una magnitud es incomparable respecto a otra si se puede demostrar que, en un cierto momento y contexto, una puede ser despreciada respecto a la otra. En consecuencia, y como se indicó antes, Leibniz trata de evitar por medio de la noción de incomparabilidad que las controversias metafísicas afecten al análisis matemático, y por tanto, que cuando se hable de infinitesimal no se le designe por una magnitud fija sino por una magnitud variable que se elige, o bien una cantidad que se toma arbitrariamente. Para ratificar su argumentación, Ishiguro cita de nuevo esa misma carta de Leibniz a Varignon:

> [...] *il faut considerer* [...] *que ces incomparables communs mêmes n'estant nullement fixes ou déterminés, et pouvant estre pris aussi petits qu'on veut dans nos raisonnements Géométriques, font l'effet des infiniment petits rigoureux, puisqu'un adversaire voulant, contredire à nostre enonciation, il s'ensuit par nostre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, estant en nostre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez pettit pour cela, d'autant qu'on peut toujours prendre une grandeur aussi petite qu'on veut.*[26] (Leibniz, 1961: 92)

[26] "[...] es necesario considerar [...] que esos incomparables comunes, incluso sin haberlos fijado o determinado en absoluto, y pudiendo ser tomados en nuestros razonamientos Geométricos tan pequeños como queramos, tienen el efecto propio de los infinitamente pequeños en sentido riguro-

LA CONCEPCIÓN LEIBNICIANA DE LOS INFINITÉSIMOS: UNA PROPUESTA SINTÉTICA

Hasta este punto hay que subrayar que el infinitesimal existente sólo puede ser nombrado cuando es una magnitud variable pero finita, que puede ser tomada tan pequeña como se quiera. Ya veía que aún siendo *concebible* un término infinitamente pequeño o un número infinito que englobe a todos los demás estos no serían sino ficciones. Como dice en resumidas cuentas Leibniz en su *Essais de Théodicée* (§ 80), no se puede asignar en esos casos ningún número preciso por que todos son finitos y asignables, al igual que toda línea, por lo demás "*les infinis ou les infiniment petits n'y signifient que les grandeurs qu´on peut prendre aussi grandes ou aussi petites que l´on voudra, pour montrer qu´une erreur est moindre que celle quón a assigné*".[27]

Así, toda referencia a las entidades infinitesimales como magnitudes actuales pasa por un discurso acerca de cantidades variables y finitas. Por consiguiente, una cosa son las diferenciales de grados diferentes, que se definen por el cociente de magnitudes finitas x y y, como el límite de las series de tales cantidades comparables pero cada vez más pequeñas, o derivada (diferencia de una función que corresponde al valor límite cuando un segmento de x decrece continuamente).[28] Y otra cosa es el infinitesimal como magnitud variable finita que tiene la virtualidad de ser tomada tan grande o tan pequeña como se quiera, mostrando así que el error puede ser siempre menor que el asignado anteriormente.

Por tanto, el análisis no debe ser entendido como un método de aproximación, sino como un cálculo exacto, un algoritmo, que suponiendo el principio de continuidad puede tomar tantos valores infinitamente pequeños como requiera nuestro razonamiento matemático. Respecto a esa cuestión *problemática* de los incomparables, hay que decir que Leibniz intentó explicar, como he visto, que el

---

so, puesto que si un adversario quiere contradecir este enunciado, el error en nuestro cálculo será menor que el que él podrá asignar, estando en nuestro poder tomar lo incomparablemente pequeño, lo suficientemente pequeño para ese fin, sobre todo pudiendo tomar una magnitud tan pequeña como se quiera" (la traducción es mía).

[27] "Los infinitos o los infinitamente pequeños no significan mas que se pueden tomar las magnitudes tan grandes o pequeñas como se quiera, mostrando así que un error puede ser menor que el que ya se ha asignado" (la traducción es mía).

[28] *Cfr.*, Ishiguro, 1986: 189.

infinito no debía ser tomado en el análisis "*à la rigueur*". Por ello, utilizó *analogías* para explicar el infinito por la noción de incomparable, haciendo depender su comprensión de lo imaginario y hacer visible el razonamiento. Belaval escribe:

> *Quant à l'imagerie de grain de sable et de la Terre, de la Terre et du firmament, etc..., elle ne relève que très accessoirement d'une justification psychologiste; il s'agit chez Leibniz —et combien d'autres inventeurs!— de la revélation, longuement préparée, d'une "lumière subite" —le triangle caracteristique dans un brouillon de Pascal—, d'une découverte qui, non formulée en sa vraie langue, la langue des calculs, s'annonce par quelque figure philosophico-rhetorica (G.M.V. 385). Reste l'imagerie des incomparables soulevait plus d'objections qu'elle n'en dissipait. Il faudra plus d'un siècle pour les ressoudre el passer de l'incomparable à la fonction (dont Leibniz a conçu l'ébauche) et à la derivée. Après Varignon (6), Euler (7), vient Langrage; un de ses titres résume le siècle: Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul differentiel, dégagés de toute consideration d'infinement petits, d'evanouissants, de limites et réduits à l'analyse algébrique de quantités finies.*[29] (Belaval, 1986: 44-45)

Los matemáticos del siglo XVIII, entre ellos Jean Le Rond D´Alambert o Lazare Carnot, reprocharon a Leibniz el peligro que encarna el uso de la noción de incomparable para explicar lo infinitesimal (o infinitamente pequeño). El problema para muchos matemáticos fue que lo infinitesimal no viniera precedido por

[29] "La imaginería del grano de arena y de la Tierra, de la Tierra y del firmamento, etc., es una imaginería que no responde mas que muy accesoriamente a una justificación psicologista; se trata en Leibniz —como en tantos otros inventores— de una revelación que ha sido preparada con mucha antelación, de una "luz súbita"— el triangulo característico en un borrador de Pascal—, de un descubrimiento que al no haberse formulado en su verdadera lengua, la lengua de los cálculos, se expresa mediante alguna figura filosófico-retórica (G.M. 385). Por lo demás, esa imaginería de los incomparables planteaba más objeciones que las que resolvía. Hará falta más de un siglo para resolverlas y pasar de lo incomparable a la función (que Leibniz ya esbozó) y a la derivada. Después de Varignon y Euler, viene Lagrange; el título de una de sus obras resume el siglo: *Teoría de las funciones analíticas conteniendo los principios del cálculo diferencial, eliminados de toda consideración relativa a los infinitamente pequeños y límites, y reducidos al análisis algebraico de cantidades finitas*" (la traducción es mía).

una definición con lo cual el cálculo manifestaba una cierta ambigüedad, ya que podía ser tanto un método de aproximación como un cálculo riguroso. Trataré por último cómo se puede resolver esta objeción de gran interés, sintetizando las posturas de Bruschvicg y de Ishiguro.

Como ya señalé, el análisis leibniciano no está sometido a *controversias metafísicas* al estilo de las de Berkeley porque el nuevo tratamiento del infinito, y no de la infinitud, que él propone siguiendo el estilo de Arquímedes, se concreta en un algoritmo que presupone siempre el principio de continuidad. De esta manera, en los cálculos exactos del cálculo diferencial se expresa siempre un permanente movimiento, lo cual no equivale evidentemente a decir que esas determinaciones infinitesimales sean fijas. Los signos y las relaciones matemáticas no poseen ya un referente substancial, de modo que el análisis del infinito puede penetrar y expresar también, mediante el cálculo, las leyes de la naturaleza. Tal es el caso de la dinámica leibniciana, en la que se concibe el movimiento como proceso y no como simple movimiento local.

Por tanto argumenta Belaval, lo infinitesimal posibilita una nueva conceptualización del punto como línea *infinite parva seu evanescens* y del reposo como *motus evanescens*. Es decir, el reposo es un caso particular de la ley general, como en el caso estrictamente matemático la igualdad es un caso particular de la desigualdad. Todo ello le permite también rectificar las leyes de choque cartesianas, ya que gracias a los infinitesimales se pueden concebir los cuerpos duros como elásticos y, por tanto, como deformables.[30]

El infinito actual está presente en la materia, en el tiempo, en el movimiento, y en esa medida el conocimiento matemático está orientado a consumarse en una física, como afirmó Leibniz en una carta dirigida a Huygens,[31] ya que su destino natural es ocuparse de lo dinámico. Conforme a estas propuestas, la física puede apropiarse de los conceptos del análisis infinitesimal y comunicarles su sentido expresivo, como dice Granger "*en introduisant l'image des êtres comme foyers dinamiques*".[32]

En definitiva, la Característica Universal tiene como expresión más lograda el cálculo infinitesimal. El nuevo cálculo, en tanto forma algorítmica, es óptimo,

---

[30] Belaval, 1986: 45.

[31] Leibniz, 1962: 669.

[32] Granger, 1981: 6. "Introduciendo la imagen de los seres como centros dinámicos" (la traducción es mía).

porque responde a la definición de Razón, entendida no como facultad, sino como encadenamiento de verdades, es decir, de demostraciones verificables. Además, es riguroso porque el lenguaje simbólico que conforma el algoritmo está exento de la vaguedad del lenguaje natural y sólo un algoritmo puede ofrecer sus propias pruebas. Los elementos de ese lenguaje, los signos, no son empíricos y, por tanto, no están sometidos a la confusión de la percepción, con lo cual en sí mismos no tienen entidad si no es por la relación que obtienen al ser combinados con otros mediante las reglas que los configuran y les dan sentido. El arte de inventar confirma, pues, que el orden lógico es dinámico y que siempre puede ser perfeccionado.

BIBLIOGRAFÍA:

Belaval, Yvon, (1986), "La place de '*Nova Methodus*' dans le système leibnizien", en *Studia Leibnitiana*, Sonderheft, núm. 14, pp. 38-48.

__________, (1970), *Leibniz critique de Descartes*, París, Gallimard.

Berkeley, Georges, (1982), "Of infinites", en *Revue Philosophique*, núm.1, pp. 46-57.

Brunschvicg, Leon, (1972), *Les étapes de la philosophie mathématique*, París, Blanchard.

Granger, Giles-Gaston, (1981), "Philosophie et mathèmatiques leibniziennes", en *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. I, pp. 6-15.

Ishiguro, Hide, (1986), "La notion dite confuse de l' infinitesimal chez Leibniz", en *Studia Leibnitiana*, Sonderheft, núm. 14, pp. 183-196.

Koyré, Alexandre, (1977), *Estudios de Historia del pensamiento científico*, Madrid, Siglo XXI.

Leibniz, Gottfried Wilhelm, (1961), *Leibnizens matematische Schriften*, 7 vols., Hildesheim, Gerhardt.

__________, (1768), *Leibnitii Opera Omnia*, edición de L. Dutens, Ginebra.

__________, (1962),Der Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern, Hildseheim, Gerhardt.

__________, (1987), *Nova methodus / Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no ser detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas,* Madrid, Tecnos.

__________, (1989), *Filosofía para princesas,* Madrid, Alianza.

Parmentier, Marc, (2001), "Démonstrations et infiniment petits dans la *Quadratura arthmetica* de Leibniz", en *Revue d´Histoire des Sciences,* vol. LIV, núm. 3, pp. 275-289.

Pascal, Blaise, (1954), *Oeuvres Completes*, Ed. Chevalier, París, La Pléiade.