Signos Filosóficos, vol. VI, núm. 11, enero-junio, 2004, pp. 121-140

UN REFINAMIENTO DEL CONCEPTO DE SISTEMA AXIOMÁTICO

JOSÉ ALFREDO AMOR*

Resúmen: El objetivo de este artículo es presentar una concepción y formulación particular de los conceptos de *derivación formal* y de *sistema axiomático*, que no son ortodoxos, sin embargo, pertenecen a la lógica clásica. En particular, propongo que la definición de derivación formal incluya la posibilidad de establecer restricciones a la aplicación de las reglas de inferencia y que dicha definición modificada de derivación formal, forme parte de la definición misma de sistema axiomático. Esta nueva formulación mejora la noción sintáctica de derivación formal en sistemas axiomáticos, en el sentido de lograr mejor su adecuación con la noción semántica de consecuencia lógica.

Abstract: *The aim of this paper is to propose a particular conception and formulation of the concepts of formal derivation and axiomatic system, which, although not orthodox, remain part of classical first order logic. It is proposed, in particular, that the definition of formal derivation includes the possibility of establishing restrictions to the applications of inference rules and that this improved definition be subsumed as a part of the very notion of axiomatic system. This syntactic notion of formal derivation in formal systems is more adequate to classical semantic logical consequence.*

PALABRAS CLAVE: SINTAXIS, SEMÁNTICA, AXIOMA, REGLA DE INFERENCIA, DERIVACIÓN FORMAL

1. INTRODUCCIÓN

En la lógica matemática clásica hay dos enfoques tradicionales: el *sintáctico* y el *semántico*. El primero se refiere a las propiedades y relaciones entre símbolos y sucesiones de símbolos, apelando únicamente a la forma y al orden en que aparecen y no al significado. Este enfoque sintáctico es identificado con un

* Profesor-investigador, Facultad de Ciencias, UNAM, jaam@hp.fciencias.unam.mx

RECEPCIÓN: 6/05/03 ACEPTACIÓN 11/07/03

cálculo axiomático en una de las formas adoptadas por este punto de vista. Otras formas tales como los cálculos de tipo Gentzen no se considerarán en este artículo, no porque no sean importantes, sino porque quiero tomar sólo un representante del punto de vista sintáctico. En este sentido, en una presentación sintáctica de la lógica, la justificación para aceptar fórmulas se basa sólo en reglas formales establecidas de antemano dentro de un aparato formal llamado *sistema axiomático* y a partir de la aceptación incondicional de ciertas fórmulas iniciales llamadas *axiomas* y de ciertas relaciones formales llamadas *reglas de inferencia*, diseñadas para obtener fórmulas a partir de fórmulas.[1]

En el enfoque sintáctico, se presenta la noción fundamental de *derivación formal*: una fórmula particular φ es *formalmente derivable* a partir de un conjunto dado de fórmulas Σ, si hay un objeto formal llamado *derivación*, definido por medio de reglas sintácticas establecidas con anterioridad, que depende del conjunto de fórmulas y de la fórmula. Esta relación sintáctica se denota de manera usual por $\Sigma \vdash \varphi$ y se lee: φ *se deriva formalmente a partir de* Σ. La definición precisa de esta noción la daré en la siguiente sección.

El enfoque *semántico* se refiere a las relaciones de los símbolos del lenguaje formal con un significado establecido para ellos, apelando a la noción de interpretación basada en dicho significado. La semántica relaciona los lenguajes formales con una interpretación para ellos, que en nuestro caso de un lenguaje formal de primer orden con igualdad, es un sistema constituido por un conjunto no-vacío llamado universo de la interpretación, junto con relaciones, operaciones y objetos *distinguidos* del conjunto.[2] El sistema completo es llamado *estructura conjuntista algebraico-relacional*[3] o simplemente *estructura*. Cada lenguaje de primer orden determina la clase de todas las estructuras que son interpretaciones para ese lenguaje. Cada símbolo del lenguaje debe tener un significado preciso en la estructura: cada constante individual debe ser interpretada como

---

[1] Esta aceptación tiene el sentido de una suposición voluntaria y no de algo necesariamente verdadero.

[2] Los llamamos *distinguidos*, simplemente porque tienen un nombre en el lenguaje y se distinguen en eso de los demás. Una razón para distinguirlos es que jueguen algún papel especial en la interpretación, como por ejemplo el cero en el conjunto de los números enteros.

[3] Una estructura algebraico-relacional es una cuarteta $\mathsf{A} = < A, R, O, C >$ donde A es un conjunto no vacío, R es un conjunto de relaciones en A, O es un conjunto de operaciones en A y, por último, C es un conjunto de elementos (distinguidos) de A.

un elemento (distinguido) del conjunto universo, cada símbolo de predicado de cierta *aridad*[4] como una relación de la aridad correspondiente entre elementos del universo, y cada símbolo funcional de cierta *aridad* como una operación sobre el universo, de la *aridad* correspondiente. Los símbolos lógicos: conectivos, cuantificadores e igualdad, tienen la interpretación clásica.[5] Por comodidad, convengo que tengo siempre el símbolo lógico de igualdad y todos los símbolos lógicos clásicos usuales (negación, disyunción, conjunción, condicional material, bicondicional material, cuantificación universal y cuantificación existencial), en caso de no ser así, supondré que tengo un conjunto de símbolos lógicos con los que se pueden definir todos los demás.

En la presentación semántica de la lógica clásica, la aceptación de las fórmulas se basa en la definición tradicional de verdad debida a Alfred Tarski.[6] Las interpretaciones las entenderemos del modo estándar de la teoría de modelos como se describió antes.[7]

En todo lo que sigue me referiré únicamente a lenguajes formales de primer orden con igualdad.[8] Con respecto a la notación, usaré las letras griegas minúsculas α, β, γ, φ, ψ, para referirme a fórmulas de un lenguaje de primer orden con igualdad. Las letras griegas mayúsculas Σ, Δ, Γ, las usaré para referirme a conjuntos, finitos o infinitos, de fórmulas de dicho lenguaje.

Sea $\Sigma\cup\{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas, no necesariamente enunciados, en un lenguaje de primer orden con igualdad.

[4] La *aridad* es un número entero positivo asociado a cada símbolo de predicado y a cada símbolo de función y que determina el número de argumentos de la relación o de la función que lo interprete.

[5] La interpretación clásica y natural para el símbolo de igualdad es la relación de identidad.

[6] La definición de verdad de Tarski no la desarrollaré aquí, pero puede verse en Mendelson, 1987: cap. 2. La idea intuitiva es que un enunciado φ es *satisfecho* respecto a una interpretación A y una asignación *s* para las variables, si es el caso que la interpretación de φ con la asignación *s* se cumple en A Una fórmula φ es *verdadera* con respecto a una interpretación A si y sólo si φ es satisfecha con respecto a esa interpretación por todas las asignaciones *s* , (*cfr.*,Tarski, 1935).

[7] *Cfr.,* Enderton, 2001: 80 o Mendelson, 1987: 46.

[8] Supongo que se tienen, bien como símbolos del lenguaje o bien como símbolos definidos, a todos los conectivos y cuantificadores usuales: no ($\neg$), y ($\wedge$), o ($\vee$), si… entonces… ($\rightarrow$), si y sólo si ($\leftrightarrow$), para todo ($\forall$) y existe ($\exists$).

Definición. La fórmula φ es *verdadera* en una interpretación A (o A es un modelo de φ) si y sólo si φ es satisfecha con respecto a todas las asignaciones para las variables[9] en esa interpretación.[10]

A las fórmulas que son verdaderas en cualquier interpretación se les llama *lógicamente válidas*. Cuando una fórmula es verdadera en una interpretación para su lenguaje, decimos que la interpretación es un *modelo* de la fórmula; así pues, una fórmula es lógicamente válida si toda interpretación es modelo suyo. De manera análoga, un *modelo* para un conjunto de fórmulas es una interpretación para el lenguaje, respecto a la cual todas las fórmulas del conjunto son verdaderas.

Definición. La fórmula φ *es una consecuencia lógica* del conjunto de fórmulas Σ (o Σ *implica lógicamente a* φ) si y sólo si para toda interpretación A, todas las asignaciones para variables *s* que satisfacen α para toda $\alpha \in \Sigma$, también satisfacen φ.[11] Notación: $\Sigma \models \varphi$.

Obsérvese que esto significa que es imposible que haya una interpretación y una asignación respecto a la cual todas las fórmulas del conjunto Σ sean satisfechas y la fórmula φ no lo sea.

Por ejemplo, tenemos que $\forall xP(x) \models P(c)$ pero $P(x) \not\models \forall xP(x)$ y que si $\varphi \models \forall x\varphi$ entonces $\models (\varphi \rightarrow \forall x\varphi)$; para cualquier fórmula φ no necesariamente enunciado. De las definiciones se sigue, en el caso particular de *enunciados*, que un enunciado φ es consecuencia lógica de un conjunto de enunciados Σ si y sólo si, para cualquier interpretación, si todos los enunciados de Σ son verdaderos, entonces el enunciado φ también es verdadero, o si todos los modelos de Σ son modelos de φ; o bien, es imposible que haya un modelo de Σ que no sea modelo de φ.

A continuación presento los conceptos sintácticos tradicionales de axioma y regla de inferencia. En la sección tres trataré con la definición tradicional de derivación, de sistema axiomático y el primer ejemplo de restricción a la aplicación de una regla de inferencia. El apartado cuatro está dedicado a ciertas for-

---

[9] Las *asignaciones* (o *valuaciones*) son todas las instanciaciones posibles para las variables, con elementos del dominio en el cual varían, y con respecto a una interpretación dada. Para una explicación detallada de los conceptos de interpretación y asignación, *cfr*., Mendelson, 1987: cap. 2.

[10] *Cfr*., Enderton, 2001: 87 o Mendelson, 1987: 48.

[11] *Cfr*., Mendelson, 1987: 52 y Enderton, 2001: 88.

mas normales de Skolem, con el objeto de dar un segundo ejemplo y motivación de la idea de restricción a la aplicación de una regla. En la sección cinco daré la noción propuesta de refinamiento de sistema axiomático y, en la última parte, presento algunas conclusiones.

2. NOCIONES SINTÁCTICAS BÁSICAS

Para cualquier fórmula α y cualquier conjunto de fórmulas Σ, hay una noción sintáctica matemáticamente rigurosa de "α es formalmente derivable a partir de Σ" que pretende capturar la noción intuitiva de "la fórmula α se sigue, se deduce o se demuestra a partir del conjunto de fórmulas Σ". Esta noción matemática está basada en el concepto de *sistema formal de tipo Hilbert*, el cual descansa a su vez en los conceptos de *axioma*, *regla de inferencia* y *definición de derivación formal*.

Un *axioma* es simplemente una fórmula que pertenece a un conjunto de fórmulas elegidas, que juegan el papel de primeros principios dentro del concepto de sistema axiomático que daré más adelante. Ya que los axiomas son sólo fórmulas, es natural pedir que el conjunto de dichas fórmulas elegidas sea *decidible*.[12] Una justificación para pedir la decidibilidad de los axiomas es que nuestro punto de partida serán ellos y la intención es tener un punto de partida decidible, así como un concepto de derivación formal también decidible.

Una *regla de inferencia* es un mecanismo formal finito, comúnmente presentado en forma de esquema, que permite obtener una fórmula a partir de una o más fórmulas (un número finito de ellas) a las que llamamos sus premisas. Además, el mecanismo como relación entre una fórmula y sus premisas, debe ser decidible.[13] Obsérvese que cada regla de inferencia tiene un número n ($n \geq 1$) de premisas. Usualmente cada regla de inferencia se presenta en forma esquemática; es decir, cada una es en realidad un *esquema de regla* de inferencia.

---

[12] Un conjunto o una relación es *decidible*, si existe un procedimiento efectivo finito, conocido como *algoritmo*, para decidir, efectivamente, si un objeto pertenece o no al conjunto, o si un par de objetos pertenece o no a la relación. Por ejemplo, en este caso, que se pueda responder de manera objetiva la pregunta de si una fórmula dada es axioma o no lo es.

[13] En este caso, debe ser decidible si una fórmula se obtiene de las otras o no, por medio de una regla de inferencia.

La fórmula que se obtiene de las premisas por medio de una regla de inferencia, se dice que es una *inferencia*, *conclusión* o *consecuencia*, de las premisas *por medio de* regla de inferencia.

En general una regla de inferencia R que nos permite obtener una fórmula φ a partir de las *n* fórmulas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (premisas), la podemos representar informalmente como:

$$R: \quad \alpha_1,\ldots,\alpha_n \ / \ \varphi$$

donde $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son las premisas y φ es la conclusión. A continuación daré tres ejemplos de esquemas de reglas de inferencia, donde α y β representan fórmulas cualesquiera:

1) $\alpha, (\alpha\rightarrow\beta) \ / \ \beta$. De α y $(\alpha\rightarrow\beta)$ obtener β; regla de dos premisas, conocida como *Modus Ponens* (MP).
2) $\alpha \ / \ (\forall x\alpha)$. De α obtener $(\forall x\alpha)$; regla de una premisa, conocida como Generalización (GEN).
3) $FSV(\alpha) \ / \ \alpha$. De $FSV(\alpha)$[14] obtener α; regla de una premisa a la cual llamamos Regla de Skolem (SK).

Formalmente una regla de inferencia de *n* premisas es una relación en el metalenguaje de *n*+1 argumentos acerca del conjunto *FL* de todas las fórmulas del lenguaje.[15] Así por ejemplo, las reglas anteriores son formalmente las siguientes relaciones:

1) $MP=\{ (\alpha,(\alpha\rightarrow\beta),\beta) \ / \ \alpha \text{ y } \beta \text{ son fórmulas}\}\subseteq FL^3$
2) $GEN=\{ (\alpha,(\forall x\alpha)) \ / \ \alpha \text{ es fórmula}\}\subseteq FL^2$
3) $SK=\{(FSV(\alpha),\alpha) \ / \ \alpha \text{ es fórmula}\}\subseteq FL^2$

[14] $FSV(\alpha)$ denota una fórmula que es una forma normal asociada con α, llamada *Forma de Skolem para Validez* de α. *Cfr.*, Malitz, 1979: 156 y Amor, 1999: 83. Por ahora diré que $FSV(\alpha)$ es una fórmula de la forma $(\exists x_1\ldots\exists x_k\psi)$ donde ψ no tiene cuantificadores, y que se obtiene de α al prenexar todos los cuantificadores y eliminar los cuantificadores universales sustituyendo sus variables cuantificadas por funciones de Skolem. Más adelante en la sección cuatro, veremos con detalle este tipo de formas normales de fórmulas.

[15] Formalmente, una relación de ***m*** argumentos sobre un conjunto A es un subconjunto cualquiera del producto cartesiano de A consigo mismo, ***m*** veces. Es decir, es un subconjunto de m-uplas del conjunto $A^m = AxAx\ldots xA$ (m veces). En este caso, una regla de inferencia de ***n*** premisas es un subconjunto del conjunto $\boldsymbol{FL^{n+1}}$.

Aunque las reglas de inferencia son mecanismos formales efectivamente decidibles y se presentan como esquemas formales sintácticos, podemos clasificarlas con un criterio semántico, según suceda que la conclusión obtenida por ellas tenga o no cierta propiedad semántica que tengan sus premisas. Es decir, si ciertas propiedades semánticas se heredan de las premisas a la conclusión. Esto nos interesa en particular para las siguientes propiedades semánticas de fórmulas:[16]

a) Satisfacibilidad por una asignación *s* en una interpretación A.
b) Verdad en una interpretación o estructura A.
c) Validez lógica.

Los elementos para nuestra clasificación de reglas de inferencia son: las fórmulas del lenguaje, las estructuras algebraico-relacionales A y las asignaciones a variables *s*.

Definición. Sea R: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n /\varphi$, una regla de inferencia, entonces:

1) R es *muy buena* si y sólo si para cualesquiera $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, premisas de R, para toda interpretación A y para toda asignación *s* en A, se cumple lo siguiente:

> Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son todas satisfechas por *s* en A, entonces la conclusión φ, también es satisfecha por *s* en A. Es decir, si R preserva cualquier satisfacibilidad de asignaciones.

2) R es *buena* si y sólo si para cualesquiera $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, premisas de R y para toda interpretación A sucede lo siguiente:

> Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son todas verdaderas en A, entonces la conclusión φ, también es verdadera en A. Es decir, si R preserva verdad en estructuras, o *lleva* de verdadero a verdadero.

3) R es *regular* si y sólo si para cualesquiera $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, premisas de R, si todas son lógicamente válidas, entonces la conclusión φ también es lógicamente válida. Es decir, si R preserva validez lógica.

[16] La definición de estas propiedades es justamente la muy conocida definición de verdad de Tarski.

Proposición. Toda regla de inferencia *muy buena* es *buena* y toda regla de inferencia *buena* es *regular* pero no inversamente en cada caso.

Es inmediato verificar la proposición. Sólo veremos algunos ejemplos; debe ser claro que la regla MP: $\alpha,(\alpha\rightarrow\beta)/\beta$ es *muy buena*, GEN: $\alpha/(\forall x\alpha)$ es una regla *buena* que no es *muy buena*. La regla SK: FSV(φ)/φ, es *regular*, pero no es *buena*.[17] Algunos de estos ejemplos los usaré en las secciones tres y cuatro, donde ilustraré la conveniencia de imponer restricciones a la aplicación de algunas reglas de inferencia.

Termino esta visión semántica sobre las reglas de inferencia en la lógica clásica de primer orden, con una proposición que incluye tres resultados que considero aclaran más este punto de vista.

Proposición. Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ /φ denota una regla de inferencia entonces:

1. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ /φ es una regla *muy buena* si y sólo si la fórmula $[(\alpha_1\Lambda\ldots\Lambda\alpha_n) \rightarrow \varphi]$ es lógicamente válida.
2. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ /φ es una regla *buena* si y sólo si la fórmula $[\forall(\alpha_1\Lambda\ldots\Lambda\alpha_n) \rightarrow\forall\varphi]$ es lógicamente válida.[18]
3. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ /φ es una regla *regular* si y sólo si la validez lógica de $(\alpha_1\Lambda\ldots\Lambda\alpha_n)$ implica la validez lógica de φ.

Es interesante notar que de forma independiente y con otros objetivos, Fagin, Halpern y Vardi,[19] presentan una clasificación similar de reglas de inferencia[20] en

[17] Esto último quedará justificado después del teorema de la sección cuatro.

[18] Si ψ es una fórmula, con $\forall\psi$ denotamos la *cerradura universal de* ψ, es decir $\forall\psi = \forall x_1\ldots\forall x_n\psi$ donde $x_1,\ldots,x_n$ son todas las variables libres de ψ.

[19] *Cfr.*, Fagin, Halpern y Vardi, 1992: secciones 1 y 6.

[20] En Fagin, Halpern y Vardi, 1992: 1019 y 1035-1036; el tipo de regla correspondiente a "*muy buena*" es llamada "truth inference" y es denotada por $\sigma \vdash_t \varphi$. El tipo de regla correspondiente a "*buena*" es llamada "structure inference" y es denotada por $\sigma \vdash_M \varphi$ donde *M* es una clase de estructuras, (*ibid.*, pp. 1020-1021 y 1035-1036). El tipo de regla correspondiente a "*regular*" es llamada "validity inference" y es denotada por $\sigma\vdash_v \varphi$, (*ibid.* pp.1018 y 1035-1036). En el artículo mencionado se restringe la atención al caso donde hay una sola premisa, suponiendo que hay una noción de conjunción en el lenguaje (como sería nuestro caso), de modo que un conjunto finito de fórmulas se puede reemplazar por la conjunción de ellas. Así pues, podemos considerar como

varias lógicas. En dicho texto, el primer resultado de la proposición anterior no está mencionado, el segundo sí y el tercero es una reformulación de la definición correspondiente.[21]

Sin embargo, nuestro objetivo a diferencia del de ellos, es el de imponer o establecer posibles restricciones a la aplicación de las reglas de inferencia para lograr que aunque la regla sea buena, pero no muy buena (puede llevar de satisfacible por *s* a no satisfacible por *s*), con esas restricciones el resultado de la derivación sea muy bueno en el sentido de obtener siempre satisfacción por *s* a partir de satisfacción por *s*. O bien, que aunque una regla sea regular, pero no buena (puede llevar de verdad a falsedad), con esas restricciones el resultado de la derivación sea bueno en el sentido de obtener siempre verdades a partir de verdades.

3. SISTEMAS AXIOMÁTICOS

El concepto tradicional de sistema axiomático se presenta usualmente de la siguiente manera:[22]

Definición tradicional. Un sistema axiomático está dado por lo siguiente:

a) Un conjunto decidible Δ, finito o infinito de fórmulas. A las fórmulas de Δ las llamamos *los axiomas* del sistema axiomático.
b) Un conjunto finito RI de reglas de inferencia decidibles.

Independientemente de la definición anterior de sistema axiomático, por tradición se da una definición de *derivación formal* que se presenta de modo general; es decir, se aplica por igual a cualquier sistema axiomático formal:

Definición. Una *derivación formal* de una fórmula α a partir de un conjunto de fórmulas Σ, es una lista finita de *n* fórmulas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, con $n \geq 1$, de las cuales

equivalentes nuestra notación para reglas de inferencia $\alpha_1,\ldots,\alpha_n / \varphi$ y la del artículo mencionado, $\sigma \vdash \varphi$, tomando como σ a la fórmula $(\alpha_1 \Lambda \ldots \Lambda \alpha_n)$.

[21] *Cfr.*, Fagin, Halpern y Vardi, 1992: proposición 6.1, pp.1021 y 1036

[22] *Cfr.*, Mendelson, 1987 y Enderton, 2001.

$\alpha n = \alpha$ y para toda i ($1 \leq i \leq n$), o bien α_i es un axioma o bien α_i es una fórmula de Σ,[23] o bien α_i, se obtiene a partir de fórmulas anteriores de la lista por medio de alguna regla de inferencia. Si existe tal derivación formal, esto se denota con $\Sigma \vdash \alpha$ y se lee: "α *es derivable a partir de* Σ".

Hago notar que la noción tradicional de derivabilidad así definida, es la misma para cualquier sistema axiomático. Se presenta como una noción general para todo sistema, ya que cualquier sistema axiomático tiene axiomas y reglas de inferencia.

Analizaré un problema con esta definición tradicional por medio de dos ejemplos. Para el primero, considérese la axiomática de Mendelson,[24] que incluye a la regla GEN (Generalización). Por un lado, tomando la definición tradicional de derivación, se admite la derivación: $P(x) \vdash \forall x\, P(x)$ en este sistema,[25] sin embargo, sabemos que $P(x) \nvDash \forall x P(x)$.[26] De aquí es claro que la regla GEN no es *muy buena*. Por otro lado, al enunciar que el sistema satisface el *Metateorema de la Deducción*, el autor impone una *restricción a la aplicación de la regla*, como una hipótesis extra exigida al *Metateorema*: éste se cumple con la condición necesaria de que en las derivaciones, "al aplicar la regla generalización, la variable generalizada no tenga presencias libres en hipótesis de las cuales depende la fórmula a generalizar".[27] Ésta es una restricción a *la aplicación* de la regla GEN, que depende del contexto, que es efectivamente decidible y, que bien pudo haberse incluido en la definición misma de derivación. Con esto se hubieran evitado

---

[23] En ese caso se dice que α_i es una *hipótesis* de Σ.

[24] *Cfr.*, Mendelson, 1987: 69-75.

[25] En sólo dos pasos: la hipótesis y luego simplemente aplicar la regla Generalización a la hipótesis:

1. P(x) Hipótesis
2. $\forall$x P(x) GEN a 1.

[26] No es consecuencia lógica, pues es posible que una interpretación con una instancia individual *s* de x tenga la propiedad "P", pero no todos los individuos tengan la propiedad "P". Por ejemplo la propiedad "ser par", en los números naturales N, con la instancia *s*: 2 en lugar de x, *s* satisface P(x), porque 2 es par, pero no satisface $\forall$x P(x) porque no todos los naturales son pares.

[27] Decimos que una fórmula β *depende de* una hipótesis $\gamma \in \Sigma$, en una derivación dada $\Sigma \vdash \varphi$ si y sólo si (1) β es γ y la justificación para β es que $\beta = \gamma \in \Sigma$ el conjunto de hipótesis, o bien (2) β está justificada como una consecuencia de fórmulas anteriores en la derivación, por medio de una regla de inferencia del sistema, donde al menos una de esas fórmulas depende de γ. *Cfr.*, Mendelson, 1987: 58-59.

dos cosas: primero, tener como derivación formal algo que no es consecuencia lógica y, segundo, tener que agregar una hipótesis extra al enunciado del *Metateorema de la Deducción*.[28]

En la noción tradicional de derivación no existe la posibilidad de aplicar restricciones en el uso de las reglas de inferencia. Desde luego que hay que distinguir entre restricciones *a las reglas* y restricciones *a la aplicación de las reglas*. No se trata pues, de posibles restricciones a las reglas mismas, lo cual es factible con la definición tradicional, pues eso simplemente cambiaría las reglas y cambiaría, por tanto, las relaciones formales correspondientes a ellas. Nosotros proponemos poder establecer restricciones al momento de la aplicación de las reglas de inferencia, lo que no depende sólo de las reglas mismas, pues éstas, como relaciones sobre el conjunto *FL* de las fórmulas no pueden estar variando, sino que depende además del *contexto* particular de cada derivación y de la posición de las fórmulas dentro de la derivación en cada caso particular dado. La conveniencia de incluir estas restricciones dependientes del contexto en la definición misma de sistema axiomático, es que pueden permitir adaptar mejor la noción de derivación, de modo que logre mejor su adecuación a la noción de consecuencia lógica. El ejemplo de Mendelson debe hacer clara esta idea. En ese caso la definición *particular* de derivación *para ese sistema* se debe incluir: o bien α_i se obtiene a partir de fórmulas anteriores de la lista por medio de la aplicación de la regla de inferencia generalización (GEN), "*con la restricción de que* la variable generalizada no tenga presencias libres en hipótesis de las cuales depende la fórmula a generalizar". Además, esta definición de derivación formal así modificada, debe formar parte de la definición de ese sistema axiomático particular.

4. FORMAS NORMALES DE SKOLEM

Con el objeto de dar un segundo ejemplo de la conveniencia de posibles restricciones a la aplicación de reglas, veremos ahora un resultado de Skolem sobre ciertas formas normales. Con él justificaré por qué la regla de inferencia SK:

---

[28] El profesor Herbert Enderton comenta lo siguiente: "Curiosamente en su libro, Mendelson no hace coincidir la elección de sistema deductivo con la elección de definición de consecuencia lógica" (comunicación personal).

FSV(φ)/φ, presentada como uno de los ejemplos de regla de inferencia en la sección dos, no es *buena*,[29] pero sin embargo sí es *regular*.[30] Ahora bien, con cierta restricción a la aplicación de esta regla, considerada en el concepto mismo de derivación formal, el efecto es que la derivación sí preserva verdad.

El resultado mencionado que llamaré aquí “teorema de Skolem”, no debe confundirse con el famoso teorema de Skolem sobre existencia de modelos numerables para conjuntos de enunciados. El teorema de Skolem es un resultado referente a una forma especial de fórmula asociada a cada fórmula, llamada la *forma de Skolem de validez* de la fórmula. La relación entre una fórmula φ y su forma de Skolem de validez asociada, denotada FSV(φ), es una relación estrictamente más débil que la relación de equivalencia lógica, pero en suficiencia útil para que exista entre ellas una “equivalencia” al nivel de validez lógica. Así pues, se cumple que: una fórmula es lógicamente válida si y sólo si su correspondiente forma de Skolem de validez también lo es.

En lo que sigue haré precisas estas ideas y daré los elementos necesarios para poder enunciar el teorema mencionado.

Cualquier fórmula φ se puede transformar mediante un algoritmo a su “Forma de Skolem de Validez” FSV(φ). La FSV(φ) resulta ser siempre existencial pura, es decir de la forma $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$, donde ψ es una fórmula sin cuantificadores y $x_1,\ldots,x_k$ son todas las variables (libres)[31] de ψ.

Ejemplos:

$\mathrm{FSV}(\exists y \forall x \mathrm{Q}(x,y)) = \exists y \mathrm{Q}(\mathrm{f}(y),y)$
$\mathrm{FSV}(\forall x \exists y \mathrm{Q}(x,y)) = \exists y \mathrm{Q}(c,y)$
$\mathrm{FSV}(\forall x \mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(c)$

A continuación veremos cómo obtener estas formas normales. La FSV(φ) resulta de un proceso algorítmico consistente de los siguientes pasos: (1) introducción de las negaciones mediante las leyes lógicas de la negación, seguido de (2) renombre de todas las variables cuantificadas, para evitar variables repetidas

[29] Es decir, no necesariamente lleva de verdad a verdad.

[30] Lleva necesariamente de validez lógica a validez lógica.

[31] Obsérvese que las variables de ψ, donde ψ no tiene cuantificadores, son necesariamente libres.

en cuantificaciones diferentes o variables cuantificadas que aparecen también libres en otra parte de la fórmula (si las hay), después (3) obtener la Forma Normal Prenex (FNP)[32] y finalmente (4) eliminación de izquierda a derecha de todos los cuantificadores universales por "testigos" que son constantes o funciones de Skolem.[33] Este proceso es el *dual* de otro proceso conocido como "Skolemización" con el cual se genera otra forma normal llamada Forma de Skolem de Satisfacción.[34]

Como resultado de la eliminación de todos los cuantificadores universales, la FSV(φ) resulta siempre de la forma $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$, donde ψ es una fórmula sin cuantificadores, con variables (libres) $x_1, \ldots, x_k$. Hay que hacer notar que aunque los pasos anteriores hasta el de obtener la Forma Prenex generan fórmulas que son lógicamente equivalentes a la fórmula aplicada y por lo tanto son lógicamente equivalentes a la fórmula original, el proceso de Skolemización dual o de eliminación de cuantificadores universales no cumple esto, por lo que una fórmula y su Forma de Skolem de Validez no son lógicamente equivalentes. Sin embargo, cumplen una relación que, aunque más débil, es muy útil y la podríamos llamar "*equivalidez lógica*"; es decir, cumplen que: una de ellas es válida si y sólo si la otra es válida. Dicho de otro modo, o las dos son lógicamente válidas o ninguna de las dos lo es.

Otros ejemplos:

$\mathrm{FSV}(\forall y \exists x \forall z\, \neg Q(x,y,z)) = \exists x\, \neg Q(x,c,\, f(x))$
$\mathrm{FSV}(\forall x\, P(x)) = P(c)$

[32] Forma de fórmula en la cual todos sus cuantificadores (si los hay) están al principio de la fórmula y cuantifican al resto de la misma.

[33] Estas funciones (llamadas *de Skolem*) dependen de las variables de los cuantificadores existenciales anteriores; en caso de no haber cuantificadores existenciales anteriores al cuantificador universal que se está eliminando, la sustitución es por una constante (llamada *de Skolem*).

[34] *Cfr*. Mendelson, 1987; Enderton, 200; Malitz, 1979 y Amor, 1999. La definición de la Forma de Skolem de Validez (FSV) podría darse en términos de la Forma de Skolem de Satisfacción (FSS). Lo siguiente establece, para el lector interesado, la relación dual entre las dos formas normales mencionadas: Si φ es una fórmula, entonces $\mathrm{FSV}(\varphi) = \mathrm{FNP}[\neg(\mathrm{FSS}(\neg\varphi))]$, así como $\mathrm{FSS}(\varphi) = \mathrm{FNP}[\neg(\mathrm{FSV}(\neg\varphi))]$. Para más detalles y ejemplos de estas formas normales, *cfr*. Malitz, 1979: 150-157 y Amor, 1999: 71-88.

$FSV(\exists x\ P(x)) = \exists x\ P(x)$
$FSV(\forall x\ Q(x,y)) = Q(g(y),y)$[35]

Así, para obtener FSV(φ) a partir de φ, el procedimiento es el siguiente (indicamos abreviaturas para cada paso): (1)introducir negaciones (¬intro); (2)renombrar variables cuantificadas (renom-var); (3)prenexar todos los cuantificadores (prenex-cuant);[36] (4)dual-Skolemizar[37] (dsk-∀var/fsk) donde "var" es la variable universal eliminada y "fsk" es una constante de Skolem nueva o una función de Skolem nueva. Así obtenemos FSV(φ).

Las equivalencias lógicas las denotamos con " ≡ ". Hay que recordar que los pasos de dual Skolemización o de eliminación de universales, a diferencia de los demás pasos, no preservan equivalencia lógica. Como ilustración, daré un ejemplo del algoritmo para obtener la FSV(φ) a partir de φ con las abreviaturas indicadas:

$$\begin{array}{ll}
\varphi = [\exists y\forall x\ \ P(x,y)\ \Lambda\ \neg\exists z\forall x\forall y\ \ Q(z,x,f(y))] & \\
\quad \equiv [\exists y\forall x\ \ P(x,y)\ \Lambda\ \forall z\exists x\exists y\ \ \neg Q(z,x,f(y))] & \neg\text{intro} \\
\quad \equiv [\exists v\forall w\ \ P(w,v)\ \Lambda\ \forall z\exists x\exists y\ \ \neg Q(z,x,f(y))] & \text{renom-var} \\
\quad \equiv \exists v\forall z\exists x\exists y\forall w\ \ [P(w,v)\ \Lambda\ \ \neg Q(z,x,f(y))] & \text{prenex-cuant} \\
FNP(\varphi) = \exists v\forall z\exists x\exists y\forall w\ \ [P(w,v)\ \Lambda\ \ \neg Q(z,x,f(y))] & \\
DSk_1 = \exists v\exists x\exists y\forall w\ \ [P(w,v)\ \Lambda\ \ \neg Q(g(v),x,f(y))] & \text{dsk-}\forall z/g(v) \\
DSk_2 = \exists v\exists x\exists y\ \ [P(h(v,x,y),v)\ \Lambda\ \ \neg Q(g(v),x,f(y))] & \text{dsk-}\forall w/h(v,x,y) \\
FSV(\varphi) = \exists v\exists x\exists y[P(h(v,x,y),v)\ \Lambda\ \ \neg Q(g(v),x,f(y))] &
\end{array}$$

Presento enseguida el teorema semántico de Skolem, el cual involucra formas de Skolem de validez y hace explícitas las propiedades semánticas ya mencionadas, para estos tipos de formas de fórmulas.

---

[35] Nótese que, si la fórmula tiene variables libres, esas variables deben ser argumentos de las funciones de Skolem.

[36] Transformar a la Forma Normal Prenex (FNP). Hasta aquí, todas las fórmulas generadas son lógicamente equivalentes entre sí.

[37] Eliminar de izquierda a derecha cada uno de los cuantificadores universales por una función (de Skolem) que tiene como argumentos las variables de los cuantificadores existenciales anteriores a la cuantificación universal eliminada. El caso de cero argumentos corresponde a una constante (de Skolem).

Teorema de Skolem[38]

I) *Para cualquier fórmula* φ: $\models [\varphi \rightarrow FSV(\varphi)]$
II) *No para toda fórmula* $\varphi \models [FSV(\varphi) \rightarrow \varphi]$
III) *Para cualquier fórmula* φ: $\models FSV(\varphi)$ si y sólo si $\models \varphi$

Obsérvese que la FSV de una fórmula es implicada lógicamente por la fórmula; es decir, es verdad siempre que la fórmula lo sea. Sin embargo, el inverso no se cumple porque no son lógicamente equivalentes. Entonces es posible (en alguna interpretación) que la FSV de una fórmula sea verdadera y la fórmula sea falsa. Esto aclara por qué la regla de inferencia

$$SK: \; FSV(\varphi) \,/\, \varphi$$

presentada como uno de los ejemplos de regla de inferencia en la segunda sección, no es *buena*; porque no necesariamente lleva de verdadero a verdadero. Para mostrarlo supongamos que *S* es un sistema axiomático que tiene a la regla de inferencia SK. Obsérvese entonces que $P(c) \vdash_S \forall x P(x)$ pues la siguiente derivación en *S*, lo muestra:

1. P(c) **Hipótesis**
2. $\forall x P(x)$ SK 1, **pues** FSV($\forall x P(x)$) = P(c)

Por otro lado, como un ejemplo para II es claro que $P(c) \not\models \forall x P(x)$.[39] Así pues, dicha regla infiere una fórmula a partir de otra, de la que no es consecuencia lógica. Sin embargo, la regla SK es regular, ya que necesariamente lleva de validez lógica a validez lógica por III.

En la definición de derivación a partir de un conjunto Σ, en un sistema axiomático que tenga como regla de inferencia a la regla SK, podemos poner una restricción a la aplicación de dicha regla a fórmulas en la derivación. La restricción es: *no se aplique* SK *a fórmulas de* Σ *o a fórmulas que dependan de fórmulas de* Σ. Esto significa que no se permite la aplicación de la regla SK a hipótesis ni a fórmulas que dependen de hipótesis.

---

[38] *Cfr.*, Malitz, 1979: 157; Amor, 1999: 85-86.

[39] Por ejemplo interpretando a *P* como "ser par" y a *c* como el número 2, en los números naturales.

Desde el punto de vista sintáctico no es necesario explicar el por qué de una regla ni de una restricción en su aplicación. Sin embargo, desde un punto de vista intuitivo, para la intención que se tiene, esta explicación puede darse para entender el por qué de una restricción. Para el caso que nos ocupa, la restricción a la aplicación de la regla SK se impone para prevenir el paso de una hipótesis que puede ser verdadera a una inferencia que puede ser falsa.

Algo similar sucede en la lógica modal con la regla de inferencia de *necesitación* (RN), que es la inferencia de: $\Box\varphi$ (φ es necesaria) a partir de φ. Por ejemplo, en enfoques semánticos de la lógica modal[40] se establece lo siguiente: Si $\models \varphi$ entonces $\models \Box\varphi$, pero $\not\models [\varphi \rightarrow \Box\varphi]$; y en enfoques sintácticos[41] se establece la *regla de necesidad* (RN) como: si φ es un teorema (del sistema modal) entonces puede derivarse sintácticamente que $\Box\varphi$ también lo es. La restricción a la aplicación de esta regla consiste en que no haya hipótesis en la prueba. Que esta restricción es necesaria, es obvio por el hecho de que en otro caso, se podría derivar ($\varphi \rightarrow \Box\varphi$)[42]

En forma análoga, en nuestro caso con la regla SK, la inferencia de φ a partir de FSV(φ), cumple que: si $\models$ FSV(φ) entonces $\models \varphi$, pero $\not\models$ [FSV(φ)$\rightarrow \varphi$]. Así pues, la restricción de no aplicar esta regla a hipótesis ni a fórmulas que dependan de hipótesis, evita aplicarla a fórmulas que no sean lógicamente válidas o que no sean teoremas formales y, por tanto, evita perder la bondad de la inferencia a partir de hipótesis.

5. LA NOCIÓN PROPUESTA DE SISTEMA AXIOMÁTICO

La noción de derivación que enseguida propongo sí incluye ciertamente la posibilidad de especificar restricciones, dependientes del contexto, a la aplicación de las reglas de inferencia dentro de derivaciones del sistema axiomático.

Pero es claro que, en ese caso, la definición de derivación no puede ser general para todos los sistemas axiomáticos y más aún, que modifica el sistema en cuestión, por lo cual necesariamente debe ser parte de la definición misma de sistema axiomático. Además, debemos conservar la decidibilidad en la aplicación

---

[40] *Cfr.*, Chellas, 1980: 7 y 14.

[41] *Cfr.*, Orayen, 1995: 306.

[42] *Cfr.*, Gamut, 1991: vol. II, 28

de las reglas por lo cual las posibles restricciones también deben ser efectivamente decidibles.

Definición. Una *restricción* a la aplicación de una regla de inferencia a fórmulas es una condición, especificada de modo preciso, que deben satisfacer la regla y las fórmulas, y que involucra a la derivación considerada en el contexto de la aplicación de la regla y que debe ser decidible.

Así pues, *nuestra* definición de sistema axiomático queda propuesta de la siguiente manera.

Definición. Un sistema axiomático *S* está dado por lo siguiente:

a Un conjunto decidible[43] Δ, finito o infinito de fórmulas. Las fórmulas de Δ se llaman *los axiomas* de *S*.

b Un conjunto finito RI de reglas de inferencia decidibles[44] de *S*.

c Una definición de derivación formal de una fórmula α a partir de un conjunto de fórmulas Σ, que es una lista finita de *n* fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, con $n \geq 1$, tales que $\alpha_n = \alpha$ y para toda i ($1 \leq i \leq n$), o bien α_i es un axioma de *S*, o bien, α_i ,es una fórmula de Σ,[45] o bien, α_i se obtiene a partir de fórmulas anteriores de la lista por medio de alguna regla de inferencia del conjunto RI de las reglas de inferencia de *S*, y la aplicación de tal regla puede tener o no *restricciones* y en caso de tenerlas éstas deben ser efectivamente decidibles. Si existe tal derivación formal, esto se denota con $\Sigma \vdash_S \alpha$ y se lee "α es derivable a partir de Σ en el sistema *S*".

En el inciso c) es exactamente donde está la diferencia entre esta definición propuesta y la definición tradicional, y si la aplicamos como se dijo, a la restricción de la regla GEN en el sistema de Mendelson, tendremos un nuevo sistema que tendrá las dos ventajas mencionadas en la sección tres. Si la aplicamos a la restricción mencionada de la regla SK en un sistema que tenga esa regla, se evitará tener derivaciones atribuidas a esa regla, que no sean consecuencias lógicas como se vio en la sección cuatro.

---

[43] Para cada fórmula debe haber un procedimiento efectivo para decidir si la fórmula es o no un axioma.

[44] Para cada regla debe haber un procedimiento efectivo para decidir si una fórmula es consecuencia o no, de otras fórmulas por medio de dicha regla.

[45] En este caso decimos que α_i es una *hipótesis* de Σ.

Ésta es la definición que propongo y creo que es una aportación para el objetivo de tener sistemas formales más adecuados a la noción de consecuencia lógica.

Si hago una comparación de las dos definiciones, podría decir que esta definición es un "*refinamiento*" de la definición tradicional, en el sentido de que un sistema axiomático con la definición tradicional cumple con esta definición, pero un sistema axiomático con dicha definición no necesariamente cumple la definición tradicional.

CONCLUSIONES

Expuse la distinción tradicional entre *semántica* y *sintaxis* y presenté las nociones sintácticas de: sistema axiomático, axioma, regla de inferencia y derivación formal. De ésta última comparé la definición tradicional y la mía. Justifiqué por qué estas nuevas definiciones de derivación formal y de sistema axiomático son más convenientes, si la intención es adecuar la noción de derivación con la de consecuencia lógica, de un modo más fino.

Estos resultados y esta concepción refinada del concepto de sistema axiomático, nos ayudaron a encontrar una nueva prueba del teorema de correctud-completud extendido de Gödel para la lógica clásica de primer orden.[46] Esta es una prueba de *tipo semántico*, es decir: se define con un enfoque semántico un sistema axiomático *ad hoc* para el que las derivaciones formales sean precisamente las consecuencias lógicas. La prueba se hace sin trabajar dentro del sistema dado, sino usando sólo sus propiedades semánticas, así como el teorema semántico de compacidad y otros resultados semánticos, como también los teoremas de Skolem y el de Herbrand.[47] Dimos pues un sistema axiomático particular en este sentido refinado, llamado *MA*, de modo tal que fue determinante en su definición el hecho de tener una restricción dependiente del contexto, a la aplicación de una de las reglas de inferencia de dicho sistema, para que éste cumpla la correctud y la completud extendidas;[48] es decir, que para todo $\Sigma \cup \{\varphi\}$ se cumpla:

$$\Sigma \vdash_{MA} \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \Sigma \models \varphi$$

---

[46] Gödel, 1986a y Gödel 1967.

[47] Nos referimos a versiones semánticas de estos teoremas, cuya prueba es puramente semántica y que obviamente no presupone el teorema de completud.

[48] *Cfr.*, Amor, 2001.

El objetivo fue adecuar mejor el concepto de sistema axiomático a la noción semántica de consecuencia lógica y en ese sentido he propuesto una definición alternativa y no ortodoxa de sistema axiomático, pero que cae completamente dentro de la lógica clásica. Los dos ejemplos presentados y los resultados comentados anteriormente, muestran la utilidad de este refinamiento del concepto de sistema axiomático para adecuar mejor el concepto sintáctico de derivación formal a la noción semántica de consecuencia lógica clásica.

BIBLIOGRAFÍA

Atocha, Aliseda, (1999), "Reseña al libro *Compacidad en Lógica de Primer Orden y su relación con el teorema de Completud*", de José Alfredo Amor, en *Crítica*, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*, vol. XXXI, núm. 93, pp. 117-124.

Amor, José Alfredo, (2001), *Relaciones metalógicas entre compacidad y completud: una prueba semántica de completud en lógica clásica* (tesis de doctorado), México, Universidad Nacional Autónoma de México.

__________, (1999), *Compacidad en Lógica de Primer Orden y su relación con el teorema de Completud*, México, Coordinación de Servicios Editoriales/ Facultad de Ciencias/ Universidad Nacional Autónoma de México.

Chellas, Brian F., (1980), *Modal Logic an introduction*, Cambridge, Cambridge University Press.

Enderton, Herbert B., (2001), *A Mathematical Introduction to Logic*, Nueva York, Academic Press.

Fagin, Ronald; Halpern, Joseph y Vardi, Moshe, (1992), "What is an inference rule?", en *The Journal of Symbolic Logic*, vol. LVII, núm. 3, pp. 1018-1045.

Feferman, Solomon, (1986), *Kurt Gödel Collected Works*, vol. I, Oxford, Oxford University Press.

Gamut, L.T.F., (1991), *Logic, Language and Meaning*, vol. II, Chicago, The University of Chicago Press.

Gödel, Kurt, (1986a), "On the completeness of the calculus of logic", en Solomon Feferman (ed.), *Kurt Gödel Collected Works*, vol. I, Oxford University Press, pp. 61-101.

__________, (1986b), "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic", en Solomon Feferman (ed.), *Kurt Gödel Collected Works*, vol. I, Oxford, Oxford University Press, pp. 103-123.

__________, Jesús Mosterín (comp.), (1981), "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico funcional", en *Kurt Gödel. Obras completas*, Madrid, Alianza Universidad, pp. 20-34.

__________, (1967), "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic", en Kurt Gödel, *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, pp. 582-591.

Henkin, León, (1949), "The completeness of the first-order functional calculus", en *The Journal of Simbolic Logic*, vol. XIV, núm. 3, pp. 159-166.

Malitz, Jerome, (1979), *Introduction to Mathematical Logic, Part iii Model Theory*, Springer-Verlag.

Manzano, María, (1989), *Teoría de Modelos*, Madrid, Alianza Editorial.

Mendelson, Elliot, (1997), *Introduction to Mathematical Logic, Chapman & Hall.*

__________, (1987), *Introduction to Mathematical Logic*, Monterey, California, Wadsworth & Brooks/Cole.

Orayen, Raul, (1995), "Lógica modal", en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, Madrid, Editorial Trotta, pp. 289-322.

Tarski, Alfred, (1935), "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", en *Studia Philosophia*, Warsaw, núm. 1, pp. 261-405.

__________, (1956), *Logic, Semantic and Metamathematics*, Nueva York, Oxford University Press, pp.152-278.