Signos Filosóficos, vol. VII, núm. 13, enero-junio, 2005, pp. 31-55

LA PARADOJA DE RUSSELL Y EL PROGRAMA FREGEANO[1]

MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO*

Resumen: El objetivo de este artículo es mostrar el impacto de la paradoja de Bertrand Russel en el sistema matemático y filosófico de Gottlob Frege. En primer lugar muestro que el desarrollo realizado en la *Begriffsschrift* bastaba para dar una definición estructural de los números naturales, pero que aún faltaba decidir entre varias opciones para cumplir el programa de Frege. Enseguida reviso brevemente cómo la opción tomada en *Grundlagen* puede conducir a la paradoja de Russell y por qué falla la solución propuesta en el Apéndice II de *Grundgesetze*. Por último, analizo los presupuestos implícitos en la Ley Básica V y exploro someramente a cuáles pudo haber renunciado Frege y a qué precio para salvar su sistema.

Abstract: *The aim of this paper is to show the impact of Russell's paradox in Frege's mathemathical and philosophical system. First, it shows that the development of the Begriffsschrift was enough to give a structural definition of natural numbers, but not enough to accomplish Frege's program. For this it was still necessary to make some choices. Second, it reviews how the option taken in Grundlagen may drive to Russell's paradox and why Frege's way out fails. Lastly, it analyses the implicit presuppositions in the basic law V of Grudgesetze and it examines which would be the consequences for Frege of refusing one of them.*

PALABRAS CLAVE: FREGE, RUSSELL, FUNDAMENTOS, MATEMÁTICA, PARADOJA

Los descubrimientos de Crispin Wright, Harold Hodes, John Burguess y George Boolos,[2] respecto a la forma en que puede rescatarse el trabajo matemático de Gottlob Frege reproduciéndolo en sistemas similares al de *Grundgesetze*, pero

* Profesor-investigador de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa, xamf_mx@yahoo.com

[1] La versión final de este artículo debe mucho a dos dictaminadores anónimos que incluso me han sugerido párrafos enteros. Aprovecho este espacio para expresarles mi agradecimiento.

[2] Véase Wright, 1983; Hodes, 1984: pp. 123-149; Burguess, 1984: pp. 638-640. y Boolos, 1986-1987: pp. 137-151.

RECEPCIÓN: 14/05/04 ACEPTACIÓN: 17/11/04

consistentes, han puesto en discusión, si axiomas como el principio de David Hume son analíticos y si Frege hubiera podido aceptarlos en defensa de su programa logicista.

En este artículo pretendo responder a dos preguntas relacionadas con esa discusión, a saber: ¿qué había logrado Frege en la demostración matemática de la tesis logicista? y ¿por qué la paradoja de Russell fue tan grave en el marco de su filosofía? Para ello, haré una revisión panorámica del trabajo de Frege en la reconstrucción de la aritmética a partir de la lógica, con el fin de determinar qué opciones eran viables en el marco de su filosofía para escapar a la paradoja de Russell. Empezaré mostrando que el desarrollo realizado en la *Begriffsschrift* bastaba para dar una definición estructural de los números naturales, similar a la que ofreció Richard Dedekind en 1888, pero que era necesario renunciar a la restricción de obtener un único modelo que representara de manera correcta los números naturales como objetos lógicos. Enseguida reviso, de manera breve, cómo la opción tomada en *Grundlagen* puede[3] conducir a la paradoja de Russell y por qué falla la solución propuesta en el Apéndice II de *Grundgesetze*. Por último, analizo los presupuestos implícitos en el uso de la Ley Básica V y evalúo la posibilidad de renunciar a cada uno de ellos: al principio de compresión, al que postula la existencia de un representante lógico para cada concepto, y finalmente, al criterio de identificación de conceptos explícito en la Ley Vb. Hacia el final esbozo un problema que pudo presentársele a Frege a propósito de la cuestión de los términos singulares sin denotación. Una vez analizadas estas opciones, concluyo que son poco promisorias dadas las dos restricciones que Frege impone a su sistema: que los términos se definan sólo a partir de términos lógicos, y que los números definidos en el sistema resulten ser objetos lógicos.

LA TEORÍA GENERAL DE SUCESIONES

Si "...x..." representa una fórmula con "x" como única variable libre, denotaremos con "[x | ...x...]" al concepto que subsume a todos los objetos que satisfacen la fórmula "...x...". Frege asume de manera implícita un principio de comprensión (que, como diré, está muy en consonancia con su filosofía), según el cual para cada fórmula con una variable libre existe el concepto correspondiente. Desde luego, lo mismo es válido para relaciones de cualquier tipo y emplearé una notación análoga para relaciones binarias de orden 1. Utilizaré además la siguiente notación para parafrasear las definiciones de Frege:

[3] Digo "puede" porque, como mostraré, desde otros supuestos la paradoja no se produce.

"Her_f (F)" significará $(\forall x)(\forall y)((Fx \wedge f(x,y)) \rightarrow Fy)$ (B.[4] 69)
"Fun (f)"significará $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((f(x,y) \wedge f(x,z)) \rightarrow y=z)$ (B. 124)
"Conv(f)" denotará a la relación $[(x,y) \mid f(y,x)]$. Por tanto, $Conv(f)(x,y) \leftrightarrow f(y,x)$ (Gg I, § 39)

Agrego además la abreviación:

"Iny(f)" significará Fun (Conv(f)) es decir, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((f(z,x) \wedge f(y,x)) \rightarrow y=z)$

En lo sucesivo suprimiré el subíndice "f" de "Her_f (F)", excepto cuando se haga referencia a una relación definida antes. Frege da como proposición B. 77 su célebre definición del ancestral f*, de una relación f, que podemos caracterizar informalmente así: α mantiene con β la relación f*, si y sólo si

(a) $\beta=f(\alpha)$ o
(b) $\beta=f(\gamma)$ y α está en la relación f* con γ,

es decir, si β está en la serie formada por las sucesivas aplicaciones del procedimiento f y que comienza con α. Desde luego, esto no puede ser expresado en primer orden.

"f*(x,y)" abreviará "$(\forall F)((Her(F) \wedge (\forall z)(f(x,z) \rightarrow F(z))) \rightarrow Fy)$" (B. 77). En efecto, β está en la serie formada por las sucesivas aplicaciones del procedimiento f y que comienza con α si y sólo si β tiene todas las propiedades *hereditarias* que tienen los *seguidores inmediatos* de α.

"$f_=$*(x,y)" significará lo mismo que "(f*(x,y)Vx=y)" (B. 99).

Con estas notaciones revisemos los resultados centrales alcanzados en la tercera parte de *Begriffsschrift*:

B. 84. $(Her(F) \wedge Fb \wedge f^*(b,c)) \rightarrow F(c)$.
B. 91. $f(a,b) \rightarrow f^*(a,b)$.

Un lema que Frege no demuestra pero que nos será útil es el siguiente.

[4] Con "B", "Gl" y "Gr" seguidas de números, me refiero a las proposiciones o párrafos de *Begriffsschrift*, de *Grundlagen* y de *Grundgesetze*, respectivamente.

B. 91’. $f^*(a,b)\rightarrow(\exists x)f(x,b)$. Prueba sea $F=[y\,|\,(\exists x)\ f(x,y)]$. Si $f(a,c)$, evidentemente $F(c)$, por tanto $(\forall y)(f(a,y)\rightarrow F(y))$. Si $F(w)$ y $f(w,c)$, entonces $F(c)$. En consecuencia, Her(F). Por la definición de f^*, $F(b)$.

B. 96. $(f^*(a,b)\wedge f(b,c))\rightarrow f^*(a,c)$.

B. 97. Her($[x\,|f^*(a,x)]$). Generalizando B. 96, Frege obtiene $(\forall x)\ (\forall y)\ ((f^*(a,x)\ \wedge f(x,y))\ \rightarrow f^*(a,y))$. Por substitución de “F” por “$[x\,|\ f^*(a,x)]$” en la definición de “Her”, se sigue el resultado deseado. Es decir, Frege ha demostrado que la propiedad de ser descendiente de un individuo es hereditaria. O, precisamente, que la propiedad de tener todas las propiedades hereditarias de los *seguidores* de un individuo es hereditaria.

B. 98. $(f^*(a,b)\wedge f^*(b,c))\rightarrow f^*(a,c)$. Frege sustituye “Her($[x\,|f^*(a,x)]$)” por “F” en B. 84 y por B. 97 y por *modus ponens* obtiene B. 98. (Nótese que para demostrar la proposición B. 84 para esta propiedad se requiere una regla de substitución que Frege de manera implícita emplea).

B. 102. $(f_=^*(x,w)\wedge f(w,z))\ \rightarrow f^*(x,z)$. Si $(f^*(x,w) \vee x=w)$, un caso se sigue por B. 96 y el otro por B. 91.

B. 106. $f^*(x,y)\ \rightarrow\ f_=^*(x,y)$

B. 108. $(f_=^*(x,w)\wedge f(w,z))\ \rightarrow f_=^*(x,z)$. Por B. 106 y B. 102.

B. 109. Her($[x\,|f_=^*(a,x)]$). Prueba: por la definición de “Her(F)” y por B. 108.

B. 110. $[(\forall w)(f(y,w)\rightarrow f_=^*(z,w))\wedge f^*(y,a)]\ \rightarrow f_=^*(z,a)$. Prueba: supongamos $f^*(y,a)$, entonces por definición $((\mathrm{Her}(F)\wedge(\forall w)(f(y,w)\rightarrow F(w)))\rightarrow Fa)$. Sustituya “F” por ($[w\,|f_=^*(z,w)]$) y elimine el primer conjunto del antecedente (por B. 109) para obtener el teorema.

B. 124. $((\mathrm{Fun}(f)\ \wedge f(y,z)\ \wedge f^*(y,a))\ \rightarrow\ f_=^*(z,a))$. Prueba: supongamos el antecedente de B. 124. Como Fun(f), y $f(y,z)$, $(\forall w)(f(y,w)\rightarrow w=z)$ y por tanto descargamos $(\forall w)(f(y,w)\rightarrow f_=^*(z,w))$ de B. 110, y como $f^*(y,a)$, donde concluimos $f_=^*(z,a)$.

Agreguemos una proposición similar a la anterior que Frege demuestra en *Grundgesetze* y que nos será útil en lo sucesivo:

B. 124’. $(\mathrm{Iny}\ (f)\ \wedge\ f(z,y)\ \wedge\ f^*(a,y))\rightarrow\ f_=^*(a,z)$.

Esta proposición será un corolario de la anterior una vez demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1. (Conv(f))*=Conv(f*).

Prueba. Puesto que Conv(f*)(b,a)↔f*(a,b), basta mostrar que (Conv(f))*(b,a)↔f*(a,b). Y ya que evidentemente Conv(Conv(f))=f, es suficiente probar que si f*(a,b), entonces (Conv(f))*(b,a). Supongamos f*(a,b). Considere la propiedad G(y):

(∀F){(Her$_{Conv(f)}$(F) ∧ (∀x)(Conv(f)(y,x)→Fx))→F(a)}. Queremos demostrar que G(b), para lo cual probaremos que (∀z)(f(a,z) →G(z)) y que Her$_f$(G).

Supongamos que Her$_{Conv(f)}$(F), f(a,z) y que (∀x)(Conv(f)(z,x)→Fx). Entonces Conv(f)(z,a) y, por lo tanto, F(a). Esto prueba que (∀z)(f(a,z) →G(z)).

Ahora bien si G(w) (1) y f(w,z) (2), sea F tal que Her$_{Conv(f)}$(F) (3) y (∀x)(Conv(f)(z,x)→Fx) (4). Tenemos entonces que Conv(f)(z,w) (por(2)) y, por tanto, que F(w) (por(4)).

Por (3), (∀x)(Conv(f)(w,x)→Fx) y, por (1) y (3), F(a). Esto prueba que G(z).

B. 129. [Fun(f)∧(f*(y,a)∨f$_=$*(a,y))∧f(y,z)]→(f*(z,a)∨f$_=$*(a,z)). Prueba: supongamos que Fun(f), que f(y,z) y que f$_=$*(a,y), entonces f$_=$*(a,z) (por B. 108); por tanto, f*(z,a)∨f$_=$*(a,z).

Supongamos ahora que Fun(f), f(y,z) y f*(y,a). Por 124, f*(z,a)V z=a, y en consecuencia, f*(z,a)∨f$_=$*(a,z).

B. 133. [Fun(f)∧f*(a,x)∧f*(a,y)]→[f*(y,x)∨y=x∨f*(x,y)]. Prueba. Supongamos Fun(f). Considérese la propiedad [z |f*(z,x) ∨ z=x ∨ f*(x,z)]. De B. 129 concluimos que Her ([z |f*(z,x) ∨ z=x ∨ f*(x,z)]). Supongamos ahora que f(a,c) y que (1) f*(a,x), por B. 124, x=c o f*(c,x), o que (2) a=x, entonces f(x,c) y, por tanto, f*(x,c), por B. 91, o que (3) f*(x,a) entonces por B. 98, f*(x,c). Es decir que, en cualquiera de los tres casos, f*(c,x) ∨ c=x ∨ f*(x,c). Por tanto, si f*(a,x) ∨ a=x ∨ f*(x,a), entonces (∀y)(f(a,y)→ (f*(y,x) ∨ y=x ∨ f*(x,y))). Por definición del ancestral, si f*(a,y), entonces f*(y,x)∨y=x∨f*(x,y).

B. 133’ [Iny(f)∨f*(x,a)∨f*(y,a)] →[f*(y,x)∨y=x∨f*(x,y)]. Por B. 133 y el teorema 1.

¿QUÉ TAN CERCA ESTUVO FREGE DE SU OBJETIVO EN LA *BEGRIFFSSCHRIFT*?

Veremos ahora un teorema, demostrable con los recursos de la *Begriffsschrift*, el cual muestra cómo dada una sucesión con ciertas características se puede definir a partir de ella, utilizando el ancestral de la relación correspondiente, un sistema isomórfico a los números naturales. En cierto sentido[5] se trata de una versión modificada del teorema 263 de *Grundgesetze*.

Teorema Gr 263'. Dada una relación f que se aplique a un conjunto D de objetos entre los cuales se encuentre α, la estructura $<\{x \mid f_=*(\alpha,x)\}, \alpha, f>$ será un modelo de los axiomas de Peano, si la restricción de f a D satisface las siguientes propiedades:

a) $(\forall x)(\forall y)[(f(x,y) \wedge f(x,z)) \rightarrow z=y]$
b) $(\forall x)(\exists y)f(x,y)$
c) $(\forall x)\sim f*(x,x)$

Prueba. Llamemos a $\{x \mid f_=*(\alpha,x)\}$ el conjunto de los números naturales, a α el número 0 y a f la función sucesor. Revisemos que se satisfacen los axiomas de Peano:

1. 0 es un número natural. Prueba. Evidentemente $f_=*(\alpha,\alpha)$.
2. El sucesor de un número natural es un número natural. Prueba: $(f_=*(\alpha,b) \wedge f(b,c)) \rightarrow f_=*(\alpha,c)$, por la B. 108.
3. f es una función. Por (a).
4. Cada número natural tiene un sucesor. Por (b)
5. 0 no es sucesor de ningún número natural. Supongamos que $f_=*(\alpha,x)$ y que $f(x, \alpha)$. Por B. 102, $f*(\alpha,\alpha)$. Pero por 1 y (c), eso no es posible.
6. Si x es sucesor de dos números naturales, éstos son iguales. Supongamos que $f_=*(\alpha,z)$, $f_=*(\alpha,y)$, $f(y,x)$ y $f(z,x)$, entonces, por B. 133, $f*(y,z) \vee y=z \vee f*(z,y)$. Supongamos que $f*(y,z)$; puesto que $f(y,x)$, por B. 124, $x=z$ o $f*(x,z)$. En el primer caso, puesto que $f(z,x)$, entonces $f(z,z)$ y $f*(z,z)$ (por B. 91). En el segundo, por B. 96 y puesto que $f(z,x)$, $f*(x,x)$. Ambas conclusiones contradicen (c). Si $y=z$, el resultado se sigue. El caso $f*(z,y)$ es análogo al primero.
7. El axioma de inducción. Supongamos Her(F), $F\alpha$, $f_=*(\alpha,c)$. Si $f*(\alpha,c)$, entonces por B. 84, F(c). Si $\alpha=c$, F(c). Por tanto, $(\mathrm{Her}(F) \wedge F\alpha \wedge f_=*(\alpha,c)) \rightarrow F(c)$. Equivalentemente, $(\mathrm{Her}(F) \wedge F\alpha) \rightarrow (f*(\alpha,c) \rightarrow F(c))$. Generalizando

[5] Claro está que Frege no habría podido referirse a la noción de *modelo*.

$(\forall F)[(Her(F) \wedge F\alpha) \rightarrow (\forall c)(f^*(\alpha,c) \rightarrow F(c))]$.

Vemos que Frege logró dar una caracterización axiomática del modelo estándar de la aritmética, a la manera en que lo hizo Richard Dedekind[6] y aun superando a éste en rigor y claridad. Desde luego, para Frege no se trataba de encontrar un modelo de los axiomas de Peano en el sentido moderno de la palabra, sino de dar la definición correcta de los números, donde la palabra *correcto* alude a las condiciones especiales impuestas por la filosofía de Frege y que esbozaremos a continuación. Para decirlo en términos de los estructuralistas contemporáneos,[7] se trataba de señalar uno sólo entre los múltiples sistemas que instancian la estructura caracterizada por los axiomas de Peano, como siendo el único al que nos referimos cuando hacemos aritmética.

LAS CONDICIONES DEL PROGRAMA Y SU PROSECUCIÓN

Dos exigencias debían satisfacerse en la definición de *número*. La primera, propia del logicismo, que los términos aritméticos fuesen definidos únicamente a partir de términos lógicos. La segunda, más específica de la filosofía fregeana, que los números resultaran ser, de acuerdo con estas definiciones, objetos. Se trataba entonces de especificar un objeto lógico α y una relación lógica f con las propiedades (a)-(c) anteriores. Esto es lo que hizo, Frege de manera informal en los *Grundlagen* y, de manera formal, en los *Grundgesetze*. Ahora bien, ¿entre qué tipo de entidades estaba autorizado a buscar la relación y los objetos susodichos? Las entidades que Frege reconoce y en las cuales corren las variables de su sistema en *Grundgesetze* (que es una formalización de *Grundlagen*), son de dos clases: de un lado, hay objetos (que son de tipo 0) y del otro funciones. Éstas, a su vez, se encuentran clasificadas en tipos según la clase de los argumentos que admiten.[8] Frege supuso, en *Grundlagen* de manera implícita y en *Grundgesetze* explícitamente, que a cada concepto F (en general, a cada función) correspondía un representante lógico en la categoría de los objetos, llamado su extensión (de manera más general, su curso de valores) y que denotaremos por "Ext(F)". Aunque Frege no es muy claro en qué debe entenderse por un objeto lógico, da a entender que

---

[6] Por supuesto que Dedekind tampoco se refiere a la noción de *modelo*. Lo que demostró es que todos los sistemas simples infinitos son isomórficos, Véase Dedekind, 1963: teorema 126.

[7] Por ejemplo, Shapiro, 1997.

[8] Aunque Frege no admite funciones que tomen funciones como valores.

la representación de cualquier concepto (incluso empírico) es una operación lógica[9] y, por tanto, que la extensión de un concepto es siempre un objeto lógico. Ahora bien, tampoco está claro qué deba entenderse por una relación lógica. La siguiente es una respuesta parcial que se sigue de las observaciones de Frege acerca lo que es la lógica:[10] una relación es lógica si es absolutamente general o si en su definición no intervienen términos que aludan a ramas particulares del conocimiento ni a objetos o a conceptos empíricos. Esta condición quizá no es necesaria, pero sí suficiente y basta para catalogar como lógicas, primero, a las relaciones y conceptos primitivos de los *Grundgesetze*, a saber, la identidad, la función denotada por la horizontal, la negación, el condicional, el cuantificador universal y el curso de valores y, en segundo lugar, a las relaciones definidas únicamente por medio de las anteriores. Dicho sea de paso, esta última observación muestra en parte cuáles serían las opciones de Frege si hubiese renunciado a la segunda exigencia, a saber, que los números sean objetos.

En uno de sus descubrimientos más importantes, Frege observó en *Grundlagen de Arithmetik*[11] que una proposición numérica adscribe un número a un concepto. Así, por ejemplo, "los apóstoles de Cristo son 12" no enuncia una propiedad de Pedro, sino del concepto [x | x ser apóstol de Cristo]. Esto haría pensar que el número es una especie de concepto de segundo orden como lo son los cuantificadores, pero como dijimos, Frege considera que los números son objetos. Para ello hay por lo menos dos razones. La primera es que los términos singulares denotando números no admiten plural. En efecto, mientras que de un término conceptual (por ejemplo "x es sol") podemos formar un término singular que admite plural ("los soles"), de un numeral ("el dos") no podemos formar el plural. La segunda razón es no menos importante. Frege tendrá que demostrar, a partir de la lógica sola, que hay una infinidad de números. Como se verá, lo hará probando que el número de números que preceden o son iguales a un número n, es sucesor de n. Si los números fuesen conceptos, la prueba no conseguiría su objetivo, pues entonces el sucesor de un número sería de un orden diferente que éste.

En todo caso, sea cual fuere el objeto designado como el número que corresponde a un concepto, el número que corresponde a dos conceptos F y G debe ser el mismo cuando y sólo cuando existe una correspondencia biunívoca entre los objetos subsumidos por F y aquellos subsumidos por G, es decir, si y sólo si F y G son equinuméricos. Este ha sido posteriormente llamado *el principio de Hume*. La relación

[9] Por ejemplo, en Frege, 1980: 140.

[10] Por ejemplo, Frege, 1979.

[11] Gl, párrafo 46.

de equinumerosidad entre los conceptos [z|Fz] y [z|Gz] puede ser definida en la lógica de segundo orden:

$$[z|Fz] \text{ eq } [z|Gz] \equiv_{def} (\exists\Phi)[Fun(\Phi)\wedge Iny(\Phi)\wedge(\forall x)(Fx\rightarrow(\exists y)(Gy\wedge\Phi(x,y)) \wedge(\forall y)(Gy\rightarrow(\exists x)(Fx\wedge\Phi(x,y)))]$$

Sabemos que el número tendrá que ser un objeto asociado a cada concepto y de tal manera que se cumpla el principio de Hume. En § 68 de Gl, Frege define "número que pertenece al concepto F" como la extensión del concepto, de orden 2, "equinumérico al concepto F", lo que denotaremos así:

$$N[z|Fz]=_{def} Ext\ [X|X \text{ eq } [z|Fz]]$$

Adviértase que, como la relación de equinumerosidad sólo está definida para conceptos de orden 1, las propiedades numéricas sólo son atribuibles a este tipo de conceptos. Esto es, sin duda, una limitación que contrasta con la observación fregeana acerca de la aplicabilidad universal de la aritmética. ¿Es grave esta objeción? No, por dos razones. Por un lado, esta cuestión se relaciona de manera estrecha a la observación fregeana de que la relación de identidad es sólo aplicable a objetos, pero que una relación análoga podría aplicarse, por ejemplo, a conceptos de primer orden[12] y, evidentemente, mientras no haya criterios para que esta relación se de entre conceptos, no puede haber atribuciones numéricas a conceptos de orden más alto. En segundo lugar, puede observarse que el sistema de Frege hace la economía de las funciones de orden superior gracias a la función de representación y, por tanto, no es necesario, en principio, definir números de orden superior. Pero esto equivale a identificar los conceptos coextensionalmente.

Con la definición dada, Frege demuestra en el § 73 el *principio de Hume*:

$$NX= NY\leftrightarrow X \text{ eq } Y.$$

En (§ 72), Frege define "x es un número" como equivalente a "$(\exists X)(NX =x)$". Para completar el programa sólo falta definir el cero y la función sucesora, y demostrar que con estas definiciones son verdaderos los axiomas de Peano. Como vimos,

[12] Véase Frege, 1994 : 144.

esencialmente, lo que hay que demostrar es que con estas definiciones se satisfacen las condiciones (a)-(c) de arriba (siempre y cuando el conjunto de números naturales sea definido como $\{x \mid S_{=}^{*}(0,x)\}$). Las definiciones susodichas son las siguientes:

(§ 74) $0=N[x \mid x \neq x]$
(§ 76) "n es sucesor de m" (o "S(m,n)") si y sólo si
$(\exists F)(\exists x)(\exists G)(Fx \& N[x \mid Fx]=n \wedge N[y \mid Fy \wedge y \neq x]=m)$.

Más adelante Frege enuncia que S(m,n) es una función y que es inyectiva. Como vimos, en principio nos bastaría probar que es una función en su restricción a $\{x \mid S_{=}^{*}(0,x)\}$. Sin embargo, también debemos demostrar que es inyectiva, pues utilizaremos este hecho en la prueba de que ningún número es menor que él mismo. Puede probarse en general que: $(\forall n)(\forall m)(\forall w)((S(n,m) \wedge S(n,w)) \rightarrow m=w)$. El esbozo de la demostración es el siguiente:

Supongamos que existen conceptos F,G, H y K y objetos a y b tales que

Fa, $N[x \mid Fx]=m$, $N[y \mid Fy \wedge \neq a]=n$

y que

Kb, $N[x \mid Kx]=w$ y $N[y \mid Ky \wedge y \neq b]=n$. Entonces, por el principio de Hume, existe una correspondencia biunívoca R entre los objetos que subsume $[y \mid Fy \wedge y \neq a]$ y los que subsume $[y \mid Ky \wedge y \neq b]$. Entonces $R \cup \{(a,b)\}$ es una correspondencia biunívoca entre los objetos que subsume F y aquellos que subsume K. Esto es demostrado de manera informal en el § 75 de *Grundlagen* y formalmente como el teorema 76 de *Grundgesetze*. Que se trata de una relación inyectiva se prueba de manera similar.

Ahora esbozaremos las demostraciones que presenta Frege de b), es decir de $(\forall n)(S_{=}^{*}(0,n) \rightarrow (\exists m)S(n,m))$, y de c), es decir de $(\forall n)(S_{=}^{*}(0,n) \rightarrow \sim S^{*}(n,n))$. La segunda es por inducción. Si $S^{*}(0,0)$ entonces, por B. 91', existiría un número b, tal que $S(b,0)$ lo que ya demostramos que es imposible. Supongamos ahora que $S(a,d)$ y que $S^{*}(d,d)$, entonces por B. 124', $d=a \vee S^{*}(d,a)$. En el primer caso, tendríamos que $S^{*}(a,a)$. En el segundo, de B. 91 y de $S(a,d)$, $S^{*}(a,d)$ y de B. 96, $S^{*}(a,a)$. Por hipótesis de inducción es falso que $S^{*}(a,a)$. Concluimos que $S_{=}^{*}(0,n) \rightarrow \sim S^{*}(n,n)$. Como corolario, obtenemos que $S_{=}^{*}(0,n) \rightarrow \sim S(n,n)$.

Vayamos ahora a la prueba de que cada número natural tiene un sucesor (GL § 82 y § 83, teorema 155 de *Grundgesetze*). Lo que de hecho demuestra Frege es que $S_{=}*(0,n) \rightarrow S(n,N[xlS_{=}*(x,n)])$.

Prueba. Vimos que son teoremas $\sim S(x,0)$ y $\sim S*(x,0)$, por tanto lo es también $S_{=}*(x,0) \leftrightarrow x=0$, y, por el principio de Hume, $N[xlS_{=}*(x,0)]=N[xlx=0]$. Ahora bien, en el § 77 de Gl se encuentra la definición de "1" ($1=N[xlx=0]$), y la prueba de que $S(0,1)$. De lo cual y de que $S(x,y)$ es una función se sigue que $S(0, N[xlS_{=}*(0,x)])$.

Ahora falta probar que si $S_{=}*(0,d)$, $S(d, N[xlS_{=}*(x,d)])$ y $S(d,a)$, (es decir, $a= N[xlS_{=}*(x,d)]$), entonces $S(a, N[xlS_{=}*(x,a)])$. Es decir, con esas hipótesis debemos probar que $N[xlS_{=}*(x,a)\&x\neq a]=a$ o $N[xlS_{=}*(x,a)\&x\neq a]= N[xlS_{=}*(x,d)]$. Sin embargo, ya probamos que

$S(d,a)\rightarrow((S*(x,d)\wedge x=d) \rightarrow S*(x,a))$ (B. 102)
$S(d,a)\rightarrow(S*(x,a)\rightarrow(S*(x,d) \vee x=d))$ (B. 124', pues Iny(S))

Por tanto, $S(d,a)\rightarrow(S*(x,a)\leftrightarrow S_{=}*(x,d))$. En consecuencia, debemos demostrar que $N[xlS_{=}*(x,a)\&x\neq a]= N[xl\ S*(x,a)]$, para lo cual basta probar que $(S*(x,a) \leftrightarrow S_{=}*(x,a)\wedge x\neq a)$.

$S_{=}*(x,a)\wedge x\neq a \equiv (S*(x,a) \vee x=a)\wedge x\neq a \equiv S*(x,a)\wedge x\neq a$, lo cual implica $S*(x,a)$. Para demostrar el condicional en la otra dirección necesitamos la hipótesis $S_{=}*(0,a)$, pues entonces ya sabemos que $\sim S*(a,a)$ y que, por tanto, $S*(x,a) \rightarrow (S_{=}*(x,a)\wedge x\neq a)$. Esto concluye la prueba de que $S_{=}*(0,n) \rightarrow S(n,N[xlS_{=}*(x,n)])$.

ANÁLISIS DE LA PARADOJA DE RUSSELL Y EL FRACASO DE LA SOLUCIÓN DE FREGE

Pero, como es bien sabido a partir de los estudios de Crispin Wright, sólo una vez en esta derivación Frege emplea (implícitamente) la Ley V de *Grundgesetze*, la cual, acompañada de otros principios utilizados en su sistema, conduce a la paradoja de Russell. El punto en cuestión ocurre en la demostración del principio de Hume: $NX= NY\leftrightarrow X$ eq Y al cual he recurrido, en numerosas ocasiones. Frege realiza esta demostración en § 73, de la siguiente manera. Prueba solo que si X eq Y entonces para cualquier concepto Z, Z eq X sii Z eq Y, y da por sentada la prueba de lo contrario. Implícito está el principio según el cual para demostrar que dos extensiones de conceptos son iguales es necesario y suficiente probar que esos conceptos subsumen exactamente los mismos objetos: $Ext([z|Fz])=Ext([z|Gz])\leftrightarrow(\forall x)(Fx\leftrightarrow Gx)$. Este principio es de manera explícita introducido en *Grundgesetze* como la Ley Básica V, la cual podemos escindirla en los dos condicionales:

$$(\forall x)\ (Fx\leftrightarrow Gx)\rightarrow Ext\ ([z|Fz])=Ext\ ([z|Gz]) \qquad (Va)$$
$$Ext\ ([z|Fz])=Ext\ ([z|Gz])\rightarrow(\forall x)\ (Fx\leftrightarrow Gx) \qquad (Vb)$$

Ahora analicemos cómo se produce la paradoja de Russell en el sistema de Frege. *Por comprensión*, sea R el concepto de primer orden $[x|\ \exists F(x=Ext(F)\&\sim Fx)]$, es decir, el concepto [ser extensión de un concepto y no caer bajo él]. Considere el objeto Ext(R) (suponemos que *existe un representante objetual, Ext(R), por cada concepto R*). Si $\sim R(Ext(R))$, entonces $\forall F((Ext(R)=Ext(F)\rightarrow F(Ext(R)))$, en particular, R(Ext(R)); por tanto, R(Ext(R)), es decir que existe un concepto F tal que $Ext(R)=Ext(F)\&\sim F(Ext(R))$, pero *por la ley Vb*, $\sim R(Ext(R))$, llegamos a una contradicción. Hemos puesto en cursivas las tres suposiciones menos evidentes que intervienen en el argumento. Ahora bien, podría objetarse que la suposición de carácter existencial no fue empleada en la derivación del principio de Hume. En efecto, pero esto no proporcionará a Frege una escapatoria, como diré más adelante.

A continuación presento la solución propuesta por Frege a la paradoja de Russell en el segundo apéndice del último volumen de los *Grundgesetze* y analizo cuáles otras vías pudo haber explorado.

La solución de Frege, (el *Frege's way out*) consiste en sustituir la Ley Básica V por el axioma que establece lo siguiente:

> [...] la extensión de un concepto coincide con la de otro si cada objeto que cae bajo el primer concepto, excepto la extensión de éste, también cae bajo el segundo concepto, y si inversamente cada objeto que cae bajo el segundo concepto, excepto la extensión de éste, también cae bajo el primer concepto. (Frege, 1964: 139)

Dicho de otro modo, las extensiones de los conceptos F y G pueden diferir o porque la extensión de F sólo caiga bajo G y no bajo F, o porque la extensión de G sólo caiga bajo F y no bajo G, o porque algún objeto diferente de ambas caiga bajo uno y no bajo el otro. Aunque la solución fue insatisfactoria para el propio Frege, Lesnieski demostró en 1938, que es inconsistente con la proposición de que hay más de un objeto. Una prueba es la siguiente:[13]

[13] Esta es una modificación ligera de las pruebas de Geach y Quine. Véase Quine, 1995, y Geach, 1956.

La modificación de la Ley V introducida en el apéndice es equivalente a postular que:

(a) $(\forall y)[y\in \mathrm{Ext}(F)\leftrightarrow(y\neq \mathrm{Ext}(F)\wedge F(y))]$

En realidad, (a) está fundada en una estipulación. Para verlo, utilizaré la siguiente notación: dado el concepto $[x|Fx]$, escribiré $F'=\{a,b,c\}$ para indicar que a, b y c son todos los objetos que satisfacen la fórmula Fx. Entonces, por ejemplo, en el caso en que $F'=\{a,b,c, \mathrm{Ext}(F)\}$ y $G'=\{a,b,c\}$, por la corrección de Frege, $\mathrm{Ext}(F)=\mathrm{Ext}(G)$. Lo mismo ocurre si $F'=\{a,b,c, \mathrm{Ext}F\}$ y $G'=\{a,b,c, \mathrm{Ext}G\}$, entonces $\mathrm{Ext}(F)= \mathrm{Ext}(G)$. Lo que equivale a postular que Ext (F) está constituida sólo por los elementos de F', a la excepción posible de Ext(F). Es decir que, en el primer ejemplo, tanto $\{a,b,c, \mathrm{Ext}(F)\}$ como $\{a,b,c\}$ serían buenos candidatos para ser extensiones de F. (a) equivale a estipular que el segundo es realmente la extensión de F. Así, la relación $F\Rightarrow \mathrm{Ext}(F)$ es una función (*). (En cambio, si $F'=\{a,b,c, \mathrm{Ext}G\}$ y $G'=\{a,b,c\}$, entonces, de acuerdo con (a), $\mathrm{Ext}(F)\neq \mathrm{Ext}(G)$.

Definamos $\lfloor$"y" y "V", de la siguiente manera:

$\lfloor y=\mathrm{Ext}[x|x=y]$, $V=\mathrm{Ext}[x|x=x]$

Tenemos entonces:

(b) $(\forall x)(\forall y)(x\in \lfloor y \leftrightarrow (x\neq\lfloor y \wedge x=y))$
(c) $(\forall x)(\forall y)(\lfloor x=\lfloor y\leftrightarrow x=y)$
(d) $(\forall x)(\forall y)(x\in \lfloor y \rightarrow x=y)$
(e) $(\forall y)(y\in V \leftrightarrow y\neq \mathrm{Ext}[x|x=x])$

(dadas las definiciones anteriores, (b) y (e) se siguen de (a); (d) de (b)). En cuanto a (c), si $x\neq\lfloor x$ y $\lfloor x=\lfloor y$, entonces, por (b) $x\in \lfloor x$, $x\in \lfloor y$, y por (d), $x=y$. En cambio, si $x=\lfloor x$ y $\lfloor x=\lfloor y$, y $y\neq\lfloor y$, entonces, por (b), $y\in \lfloor y=\lfloor x$, y, por (d), $y=x$; por tanto $y=\lfloor x=\lfloor y$, lo cual es contradictorio. El otro condicional se deriva de (*).

Sea $u=\mathrm{Ext}[x| (\forall y)(x=\lfloor y\rightarrow x\notin y)]$

Ahora bien si $\lfloor u\neq u$, entonces por (a)

$\lfloor u\in u\leftrightarrow(\forall y) (\lfloor u=\lfloor y\rightarrow\lfloor u \notin y)$, y por (c)

$\lfloor u\in u\leftrightarrow(\forall y) (u=y\rightarrow\lfloor u \notin y)$, es decir,

$\lfloor u\in u\leftrightarrow\lfloor u \notin u$.

Concluimos que $\lfloor u=u$.

Por la definición de u y por (a)

$(\forall v)((v\neq \lfloor u \wedge v\notin u) \rightarrow (\exists y)(v=\lfloor y \wedge v\in y))$

como $u=\lfloor u$, si $\lfloor v\neq u$, entonces $\lfloor v\neq \lfloor u$ y, por (c) $v\neq u$, por (d), $v\notin \lfloor u$, es decir, $v\notin u$. Esto nos permite derivar del enunciado anterior el siguiente:

$(\forall v)((v\neq \lfloor u \wedge \lfloor v\neq u) \rightarrow (\exists y)(v=\lfloor y \wedge v\in y))$

Escribiendo "$\lfloor v$" en lugar de "v",

$(\forall v)((\lfloor v\neq \lfloor u \wedge \lfloor\lfloor v\neq u) \rightarrow (\exists y)(\lfloor v=\lfloor y \wedge \lfloor v\in y))$ o, por (c),
$(\forall v)((v\neq u \wedge \lfloor\lfloor v\neq u) \rightarrow (\exists y)(v=y \wedge \lfloor v\in y))$ o,
(f) $(\forall v)((v\neq u \wedge \lfloor\lfloor v\neq u) \rightarrow \lfloor v\in v))$

Supongamos ahora que hay más de un objeto en el universo y, por tanto, que V no es una clase unitaria. Entonces $\lfloor\lfloor V\neq V$ y, por (d), $\lfloor\lfloor V\notin \lfloor V$ Sustituyendo "v" por "$\lfloor V$" en (f), tenemos que

(g) $\lfloor V=u$ ó $\lfloor\lfloor\lfloor V=u$
Ya que $\lfloor\lfloor\lfloor V\neq \lfloor V$, por (d), $\lfloor\lfloor\lfloor V\notin \lfloor\lfloor V$, sustituyendo "v" por "$\lfloor\lfloor V$" en (f) tenemos que
(h) $\lfloor\lfloor V=u$ ó $\lfloor\lfloor\lfloor\lfloor V=u$

pero (g) y (h) implican que V es una clase unitaria, contrariamente a lo que habíamos supuesto.

Peter Geach y Quine[14] extendieron este resultado. El primero probó que si en el sistema de Frege sustituimos la Ley básica V por
(i) $(\forall y)[y\in Ext(F)\leftrightarrow(y\neq H(Ext(F))\wedge F(y))]$

donde H es una función, podemos probar que no hay más de un objeto en el universo. Quine empleó en lugar de (i)

[14] Véase nota 11.

(ii) $(\forall y)[\, y \neq \mathrm{Ext}(F) \rightarrow (F(y) \leftrightarrow (\, y \in \mathrm{Ext}(F)))]$
para llegar a la misma conclusión.

Gracias a las investigaciones de Hodes, John Burguess y Boolos[15] sabemos ahora que si el principio de Hume es agregado a la lógica de segundo orden es posible definir los principales conceptos aritméticos y demostrar los axiomas de Peano, tal y como Frege mismo lo hizo. El sistema así obtenido es consistente. Dicho de otro modo, Frege demostró el teorema que ahora lleva su nombre, a saber, que en la lógica de segundo orden la aritmética de segundo orden es consecuencia del principio de Hume.

TRES VÍAS PARA EVITAR A LA PARADOJA

Ante el fracaso de un programa que consiste en reducir la matemática sea a su parte intuicionista, sea a la aritmética finitaria o a la lógica, varias reacciones son posibles. Una es la actitud revisionista: la matemática no susceptible de reducción es declarada ilegítima, otra es aceptar el fracaso del programa y rechazar la tesis filosófica que subyace al mismo. Esta última fue finalmente la reacción de Frege. Sin embargo, muy buenas razones tenía para no hacer descansar todo el peso de la prueba de su tesis filosófica en su programa matemático. Es decir, la tesis logicista tenía otra importante evidencia en su favor: los enunciados aritméticos tienen un grado de generalidad que los equipara a las verdades lógicas, como lo muestran las siguientes consideraciones esgrimidas por Frege en los *Grundlagen*.

a) Podemos imaginar sucesos contrarios a los principios de la física, pero no contrarios a los teoremas de la geometría euclidiana. Podemos pensar (que no imaginar) geometrías no euclidianas, pero no algo que sea contrario a los teoremas de la aritmética. Esto establece una gradación de generalidad entre física, geometría y aritmética (Gl, § 14). Para Frege la lógica es la ciencia más general.
b) Una proposición numérica adscribe un número a un concepto. A todo concepto de primer orden, empírico o lógico, o de cualquier otro tipo, corresponde un número (Gl, § 46). Esto, junto con la concepción que Frege tiene de lo que son los conceptos, implica que la aritmética tiene muy alto grado de generalidad.

[15] Véase nota 2.

c) El espacio y el tiempo no tienen nada que ver con el número, sólo son necesarios en el proceso psicológico de contar. (Gl, § 40)

El éxito del programa matemático de Frege habría *demostrado* la tesis logicista, pero su fracaso no implicaba que la aritmética no fuese lógica. En lo que sigue, esbozaré algunas vías de escape a la paradoja de Russell y mostraré que son poco promisorias en el marco de la filosofía fregeana.

Una vez desglosada la paradoja de Russell veamos a qué podría haber renunciado Frege para evitarla. Para llegar a ella se requieren al menos los tres principios condensados en el uso de la Ley V: uno, el de comprensión, que postula la existencia de un concepto por cada fórmula con un variable libre, el segundo es el principio que postula la existencia de un representante lógico en la categoría de los objetos por cada concepto, y el último, el criterio de identificación de estos objetos, explícito en la ley Vb (como se vio, no es el condicional Va el que es problemático).

El principio de comprensión mencionado no parece dudoso. Recordemos las características que para Frege tienen los conceptos y que son relevantes en nuestro tema: a) son denotaciones de términos conceptuales (es decir, de expresiones insaturadas que al completarse con nombres dan como resultado enunciados), b) son de una categoría distinta a la de los objetos, c) corresponde a cada uno de ellos un objeto, su extensión, y la misma extensión a dos conceptos si y sólo si éstos subsumen exactamente los mismos objetos y, por último, d) que el concepto es anterior a su extensión.

Fijemos la atención en la última característica señalada. ¿En qué sentido es el concepto anterior a su extensión? Independientemente de si se trata de una prioridad ontológica, epistemológica, o de algún otro tipo, consideraré que hay un sentido importante en el cual es posible hablar de los conceptos antes de que un criterio de identidad haya sido dado para ellos mismos o para sus representantes objetuales. Para ello me baso en varias razones. La primera es la formulación d) anterior, dada efectivamente por Frege,[16] de la cual se desprende que es posible referirse al concepto con independencia de su extensión. La segunda es que a lo largo de la *Conceptografía* y aún en algunos escritos posteriores a su publicación, Frege emplea sólo las características señaladas en a) y en b). Para mayor evidencia al respecto, hay que recordar el escrito de Frege publicado póstumamente, donde compara su obra con la de Boole y en la que reprocha a éste dejar la formación de conceptos fuera del alcance de la lógica. La *Begriffsschrift*, en cambio, permite asistir al nacimiento de los conceptos. Allí se ve que es esencial al concepto, en el sentido fregeano, su capacidad de reunir a todos los objetos (o conceptos) que satisfacen determinadas propiedades y de separarlos del resto:

[16] Por ejemplo en Frege, 1984: 224-225.

> [...] la formación de conceptos por simple recolección de cosas individuales no es sin embargo más que una formación muy arbitraria y desprovista de significación para el pensamiento efectivo, si estas cosas no están unidas por caracteres comunes. Son precisamente estos los que constituyen la esencia del concepto. (Frege, 1994: 44)

No será ilegítimo entonces un concepto bajo el que ningún objeto cae, porque sigue separando en dos el universo de los objetos (o de las funciones de cierto tipo) por medio de un criterio se subsunción. Por ello, también la simple eliminación de un elemento léxico de una frase constituye un término conceptual, siempre y cuando el reemplazo de ese elemento por cualquier otro de la misma categoría semántica produzca un enunciado. Por este medio pasamos de frases gramaticalmente similares con valores de verdad dados a la determinación de un concepto. Y es así como son introducidos los conceptos en la *Begriffsschrift*. Frege reconoce al menos otra manera de producir conceptos, que es la que conduce de una relación de equivalencia al concepto asociado a cada partición por ella generado. Así, los objetos que son equivalentes según esta relación caen en un concepto nuevo. En cualquier caso, el concepto se forma cuando hay un criterio de subsunción, no importa cómo se llegue a éste. Desde luego, lo dicho es válido también para relaciones. Así es como los conceptos son tratados y generados en la *Begriffsschrift*, sin que un criterio de identidad para conceptos haya sido dado y sin que se haya requerido de un representante objetual para los mismos. En este primer estadio de formación, los conceptos están simplemente identificados por criterios de subsunción. Lo dicho muestra también que el principio de comprensión utilizado por Frege, el cual postula la existencia de un concepto por cada fórmula abierta, es perfectamente solidario de sus ideas respecto a la naturaleza del concepto. Es decir, que la renuncia al principio de comprensión, que es la primera vía para salir de la paradoja, está cerrada en el marco de su filosofía.

Ahora bien, una determinación mayor del concepto requiere una especie de criterio ulterior de identidad de los conceptos así formados pues, aunque la identidad es una relación que se da únicamente entre objetos, Frege reconoce que una relación análoga, en algún sentido, se da entre los conceptos de primer orden. Pero hay un sentido en el cual si F y G son fórmulas distintas con una variable libre, $[xIFx] \neq [xIGx]$. Como diría Ruth Barcan Marcus, estamos en un estadio en el cual no hemos adoptado aún un principio de extensionalidad para los conceptos.

En una segunda etapa, los conceptos tendrán que ser identificados extensionalmente por los principios de la filosofía fregena. En efecto, a pesar de algunas indicaciones que parecen sugerir lo contrario (como el hablar de notas características de un concepto y la famosa nota 88 de *Grundlagen*), hay algunos argumentos que muestran que para

Frege los conceptos, en tanto que referencia de términos conceptuales, tienen que ser extensionalmente identificados. Marco Ruffino[17] aduce el siguiente argumento. Si la identidad entre objetos está dada por las leyes de Leibniz

$$a=b \leftrightarrow (\forall F)\ (Fa \leftrightarrow Fb)\ (*)$$

la *identidad* entre conceptos, llamémosla identidad conceptual y denotémosla con "$=_c$", debe estar dada, dice Ruffino, por la ley

$$F=_c G \leftrightarrow (\forall x)\ (Fx \leftrightarrow Gx)\ (**)$$

Este argumento fue, en efecto esgrimido por Frege,[18] sin embargo, la analogía no es perfecta, porque (*) significa que los términos "a" y "b" tienen la misma referencia si son intercambiables en todo contexto *salva veritate*. Sin embargo (**) no toma en cuenta todos los contextos en que los términos conceptuales pueden entrar, pues también ellos pueden ser sujetos de una predicación de orden más alto. En todo caso la coextensionalidad sería una condición necesaria, pero no suficiente para la identidad conceptual. Me parece más acertado el argumento de Philippe de Rouilhan,[19] quien señala que la identidad de conceptos coextensionales se sigue del principio de composicionalidad semántica que ha guiado Frege en su determinación de la referencia de enunciados y en su rechazo de la semántica presentada en 1879. Ya determinada la referencia de términos singulares y enunciados, un término conceptual puede intercambiarse por cualquier otro en el contexto de un enunciado, sin que el valor de verdad del enunciado resultante difiera del original, si y sólo si los dos términos conceptuales son co-extensionales. Es verdad que de aquí no se infiere que la posición de Frege al respecto hubiera sido la misma antes de 1890.

Desde luego, esto limita las elecciones para los objetos susceptibles de representar a los conceptos, pues cada concepto deberá tener un representante. Sin embargo, dejaré de lado esta conclusión (o no le daré mucho peso), por tres razones: a) para estar en libertad de examinar un número mayor de posibilidades, b) porque la cuestión de los fundamentos de la aritmética podría resolverse independientemente de si para Frege los conceptos son o no de naturaleza extensional, c) porque el criterio de identidad referido está en consonancia con la Ley Va, la cual no es problemática y, por tanto, es independiente de una posible solución a la paradoja.

Antes de abandonar esta vía de solución, advirtamos que tiene una variante a la que efectivamente se ha recurrido en la historia: no distinguir entre las fórmulas que gene-

[17] Ruffino, 2000: 239-252.

[18] Véase Frege, 1994: 201.

[19] de Rouilhan, 1988.

ran conceptos (por medio del principio de comprensión) y otras que no lo hacen, sino reducir el número de fórmulas con principios de sintaxis adecuados. Esta es la opción de la teoría de tipos de Russell,[20] pero es innecesaria en el sistema de *Grundgesetze*, pues éste sin la Ley V ya es una teoría simple de tipos.

Paso a otra opción. Admitiendo el principio de comprensión y (de manera provisional) que hay un representante lógico por cada concepto (que es el segundo supuesto empleado en la derivación de la paradoja de Russell), veamos la posibilidad de adoptar un principio de identificación diferente al de la Ley V para los representantes lógicos de los conceptos. Exploremos esta segunda posibilidad en la cual se sitúa la propuesta del Apéndice II de los *Grundgesetze*.

Frege demuestra en ese apéndice, sin emplear, desde luego, la Ley Vb, una generalización del resultado de Russell:

> Para cada función de segundo nivel de un argumento de tipo 2 hay conceptos los cuales si tomados como argumentos de esta función determinan el mismo valor, aunque no todos los objetos cayendo bajo uno de esos conceptos caen bajo el otro. (Frege, 1964: 134)

Una consecuencia es la siguiente: si los conceptos son identificados extensionalmente (es decir, considerados como conjuntos) no hay una función inyectiva de conceptos a objetos. Esta es otra forma del teorema de Cantor según el cual no hay una función biyectiva de un conjunto a su conjunto potencia. Lo que importaba a Frege era que los representantes lógicos de conceptos no podían ser identificados a la manera como lo hacía la Ley V. Por otro lado, el representante lógico de un concepto tendría que ser elegido de forma tal que se cumpliera el principio de Hume, si es que el número que corresponde a un concepto ha de ser elegido en términos del representante lógico de éste. Dada la relación de equivalencia:

F≡G si y sólo si F subsume exactamente los mismos objetos que G

llamemos a la partición que de ella resulta Con, y dada la relación de equivalencia F eq G, definida antes, sea Ceq la partición resultante. Sabemos que no puede haber tantos objetos como conceptos (considerados intensionalmente), ni tantos como elemen-

[20] Philippe de Rouilhan en el último capítulo de la obra mencionada considera la teoría de tipos y las teorías de conjuntos como soluciones a las paradojas de la representación. Yo sugiero una clasificación de estos sistemas a partir del análisis expuesto de la paradoja de Russell.

tos tiene Con (por el teorema de Cantor), pero tampoco debe haber menos representantes de conceptos que elementos hay en Ceq, pues entonces no podríamos definir los números en términos de estos representantes. La determinación de un criterio de identidad entre representantes lógicos de conceptos puede hacerse dentro de una zona que tiene como límite inferior el principio de Hume y un límite superior, difícil de precisar, arriba del cual se halla la propuesta implícita en la Ley V.

Esto sugiere una estrategia para escapar a la paradoja no renunciando ni al principio de comprensión ni al que postula un representante por cada concepto y consiste en disminuir el número de representantes postulados de manera implícita por la Ley V, identificando estos últimos adecuadamente. Dentro de esta vía, por ejemplo, encontramos la propuesta de Boolos en "Saving Frege from contradiction".[21] Consiste *grosso modo* en lo siguiente: distingue entre conceptos grandes y pequeños. Un concepto G es de los primeros si hay una función inyectiva de los objetos cayendo bajo V=[x | x=x], todas de cuyas imágenes son subsumidas por G. A todos ellos corresponde un mismo representante en la categoría de los objetos. Los demás son pequeños, y a dos de ellos les corresponde el mismo representante si y sólo si subsumen exactamente los mismos objetos. A los representantes así identificados Boolos los llama *subtensiones*. Muestra además cómo podría desarrollarse la aritmética a partir de estas definiciones dentro de la teoría general de conjuntos de segundo orden[22] y que la teoría así constituida es consistente en forma relativa a la aritmética de segundo orden.

¿Habría esta solución, o la de Wright (sustituir la Ley V por el principio de Hume), sido aceptable para Frege? La respuesta no es sencilla, pero depende de qué función deban desempeñar los representantes lógicos de los conceptos y de qué tan arbitrarias sean esas soluciones. Si se requiere de un representante objetual por cada concepto identificado extensionalmente, para poder hablar de él de manera indirecta (porque por la paradoja del concepto "caballo" no podemos hacerlo directamente), entonces esta vía de solución está vedada, como ya Frege lo demostró en el apéndice susodicho. Hay menos objetos que conceptos aún si estos son identificados por medio de la relación de co-extensionalidad. Sin embargo, podría responderse que aunque no podamos nombrar al concepto, podemos referirnos a él en la lógica de orden superior de *Grundgesetze* sin la Ley V.

La única objeción que, a mi manera de ver, podría hacérsele, por ejemplo, a la propuesta de Boolos es que ésta tiene un cierto carácter arbitrario, extraño en un

[21] Véase nota 2.

[22] No como lo hace Frege, sino desarrollando como un paso intermedio, la *teoría de conjuntos finitos* a partir de la lógica de segundo orden y de los principios regulando la existencia de subtensiones.

sistema que codifica la lógica. Sin embargo, este reparo podría ser decisivo para juzgar si sería aceptable para Frege y si podría aducirse en defensa del programa logicista. Desde luego, esta es una cuestión compleja en la que no podemos ahondar aquí.

La última posibilidad que queda es aceptar que las extensiones, es decir, los representantes de los conceptos en la categoría de los objetos, están identificados extensionalmente, pero que no a todo concepto pertenece un representante objetual. Esta es la vía seguida por algunos muy conocidos sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos. Tal es claramente el caso, por ejemplo, de NF,[23] en el que el único axioma que postula la existencia de conjuntos es un axioma de comprensión, pero éste está restringido a fórmulas estratificadas. Las demás fórmulas dan lugar a clases virtuales que pueden o no coincidir con conjuntos. Lo mismo ocurre con ZF si en su presentación se introduce una notación informal para clases con el objeto de facilitar la escritura. Pues entonces las clases que no son conjuntos pueden ser consideradas como conceptos sin representante objetual.

Notemos que la posición que Frege parece defender en sus escritos posteriores se inscribe dentro de esta posibilidad:

> Una propiedad del lenguaje que amenaza la seguridad del pensamiento es su tendencia a formar nombres propios a los cuales ningún objeto corresponde [...] Un ejemplo particularmente notable de esto es la construcción de un nombre propio con el modelo "la extensión del concepto a", por ejemplo, "la extensión del concepto estrella". Esta expresión parece designar un objeto debido al artículo definido, pero no hay objeto que pueda ser lingüísticamente así definido. (Frege, 1979: 269-270)

La solución que apuntamos no implica de manera necesaria que toda expresión de la forma *La extensión del concepto F* carezca de denotación (como lo propone aquí Frege), sino que algunas de ellas no son denotativas.

Lo que nos interesa indagar aquí es si Frege podría aceptar una solución de este tipo en el marco de *Grundlagen* o de *Grundgesetze*. Como dije antes, en la derivación del principio de Hume no se emplea el supuesto existencial que conduce a la paradoja de Russell y, en principio, podría argumentarse que ni siquiera se haya implícito en ese pasaje. Alguien podría decir, por ejemplo, "un hijo de x es primo hermano de un hijo de z si y sólo si x y z son hermanos", sin por ello suponer que todos los seres humanos tienen hijos. Sin embargo, Frege probó en *Grundgesetze* que cada número natural d tiene

[23] Sistema axiomático para teoría de conjuntos creado por Quine en 1937: New Fundations.

como sucesor $N[x|S_{=}{}^{*}(x,d)]$, y su propuesta requiere, como condición mínima de adecuación, que a cada concepto de primer orden corresponda un número. Ambas cosas suponen que ciertos conceptos de segundo orden tengan asegurada su extensión. Si todo concepto de segundo orden tiene extensión y éstas son identificadas por analogía con la Ley V, la paradoja se produce de nuevo.[24] En conclusión, por esta vía sólo podría escaparse a la paradoja si hubiese una manera natural de delimitar los conceptos de segundo orden que carecen de denotación y de manera tal que la aritmética pudiese aún construirse sobre esta base.

En lugar de examinar más esta cuestión tan compleja, finalizo apuntando un problema estrechamente relacionado. ¿Cómo podría el autor de *Grundgesetze* admitir que algunos términos singulares de la forma *la extensión de a* carecen de denotación cuando había tomado tantas precauciones contra esta posibilidad?[25] Veré esto con calma. En la exposición informal de su sistema Frege establece, amén del *desideratum* de que todos los nombres tengan denotación, una serie de criterios para observar que lo contrario no se produzca. Un nombre de función unaria de primer orden tiene denotación, si al colocar en su lugar de argumento un nombre propio teniendo denotación obtenemos un nombre que tiene denotación. Un nombre propio tiene denotación, si al llenar el lugar de argumento de toda función unaria de primer orden obtenemos un nombre que tiene denotación. Estas especificaciones son aparentemente circulares. Sin embargo, no lo son si las consideramos como recursivas, observadas en casos complejos construidos a partir de casos simples e inequívocos de nombres denotativos. Lo que quiero decir es lo siguiente. Los nombres originalmente introducidos, los valores de verdad y los de las funciones lógicas más elementales, están perfectamente definidos y tienen denotación (si suponemos que los valores de verdad existen como objetos). Para cada nuevo nombre de función, tendrá que ser especificado qué valor otorga a cada argumento ya introducido y lo mismo es válido para nombres de objetos. Es decir que si $\varphi(\alpha)$ carece de valor de verdad, significará que de entre φ y α, el que haya sido introducido más tarde carece de denotación y, por tanto, está mal definido (siempre y cuando al otro no le ocurra lo mismo con un símbolo previo). En la formulación de la paradoja de Russell en *Grundgesetze* intervienen, además de la

[24] Como lo muestra Boolos en el artículo citado.

[25] Claro está que la tesis de que los nombres de extensión no son denotativos sólo aparece en los escritos tardíos de Frege, cuando éste había renunciado ya al logicismo, pero aquí me pregunto por una posibilidad que hubiera podido presentársele a Frege en el momento de enfrentar la paradoja de Russell: a saber, que algunas de las restricciones impuestas para evitar la aparición de nombres sin denotación fuesen insuficientes.

horizontal y los conectivos lógicos, la relación de pertenencia, (implícitamente) el operador λ y la extensión (en realidad, el curso de valores, pero simplifico para facilitar la exposición). Los dos primeros están así definidos:

$x \cap y \equiv \lambda \mathrm{Ext}[z \mid (\exists F)(y = \mathrm{Ext}(F) \wedge F(x) = z)]$

$$\lambda\varepsilon = \begin{cases} \nabla \text{ Si existe un objeto } \nabla \text{ tal que } \varepsilon = \grave{e}(\nabla = \varepsilon) \\ \varepsilon \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Es decir, si existe un objeto ∇ tal que el argumento de λ es el curso de valores de la función (x=e), entonces λ asigna a ese argumento ∇ como valor. En otro caso, λε=ε. Desde luego, estas definiciones implican que $\alpha \cap \mathrm{Ext}[x \mid F(x)] = F(\alpha)$, si F asigna un solo valor a α. Vemos aquí que ambas funciones están bien definidas si el curso de valores lo está. Así es que nuestro problema se reduce a la cuestión de si el curso de valores está definido de manera correcta y, en particular, de forma tal que a todo concepto corresponda una extensión.

Frege ataca esta cuestión en la sección 10 de *Grundgesetze*. Advierte primeramente que la Ley V no fija por completo la denotación de "èϕ(e)", porque no está determinado el valor de verdad que las funciones hasta allí introducidas tienen para el argumento èϕ(e). Por ejemplo, no sabemos si èϕ(e)=v (donde "v" es el nombre del valor de verdad verdadero). Frege llega por diversos medios a la conclusión de que para que el nombre "èϕ(e)" esté bien definido (relativamente a las funciones y objetos hasta allí introducidos), basta determinar si èϕ(e)=r donde "r" representa un valor de verdad. Frege estipula que v es idéntico al curso de valores de la función que asigna v a v y falso a cualquier otro objeto, y que f (lo falso) es idéntico al curso de valores de la función que asigna f a f y v a todos los demás argumentos, después de haber esgrimido un argumento que muestra la consistencia de esta estipulación. Y aclara Frege al final de ese parágrafo:

> Con esto hemos determinado el curso de valores hasta donde es aquí posible. Tan pronto como haya una cuestión ulterior de introducir una función que no sea completamente reducible a funciones ya conocidas, podemos estipular qué valores debe tener para cursos de valores como argumentos, y esto puede ser considerado tanto como una determinación ulterior del curso de valores como de esa función. (Frege, 1964: 49)

Ahora bien, ¿no es la paradoja de Russell precisamente una demostración de que el curso de valores no está bien definido? Al preguntar si un cierto curso de valores es subsumido por un concepto, nos encontramos sin una respuesta precisa, lo que, según las normas de Frege señala una falla en la definición de un nombre. Sin embargo, el resultado sigue siendo una aporía porque no parece que haya ningún error en las definiciones dadas. Por este camino transitaron Henri Poincaré y Russell cuando distinguieron entre definiciones predicativas e impredicativas, pero lo que me interesa señalar aquí es un problema formal del sistema de *Grundgesetze* que apunta a una dificultad en la noción de *definición* allí empleada. Este es un tema que requiere un desarrollo ulterior.

He analizado someramente los tipos de opciones que se le ofrecían a Frege para escapar a la paradoja de Russell y las he encontrado poco promisorias, si son juzgadas desde el marco de su filosofía, es decir, si aceptamos la restricción de definir exclusivamente en términos lógicos a los números naturales, de suerte que resulten en objetos lógicos, y si no podemos eliminar de una manera natural alguno de los tres principios condensados en el uso de la Ley V.

BIBLIOGRAFIA

Boolos, George, (1986-1987), "Saving Frege from contradiction", en *Proceedings of the Aristotelian Society*, núm. 87, pp. 137-151.

Burguess, John P., (1984), "Review of Crispin Wright's *Frege's Conception of Numbers as Objects*", en *Philosophical Review*, núm. 93, pp. 638-640.

Dedekind, Richard, (1963), "The nature and meaning of numbers", en *Essays on the Theory of Numbers*, Nueva York, Dover.

Frege, Gottlob, (1994), *Écrits Posthumes*, Chambon Éditions Jacqueline.

———, (1984), *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Oxford, Basil Blackwell.

———, (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Oxford, Basil Blackwell.

———, (1979), *Posthumous Writings*, Oxford, Basil Blackwell.

———, (1967), "Begriffsschrift", en Jean Van Heijenoort, (ed.), *Frege and Gödel, Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*, Oxford University Press.

———, (1964), *The Basic Laws of Arithmetic*, Berkeley y Los Ángeles, University of California Press.

———, (1953), *The Foundations of Arithmetic*, Oxford, Basil Blackwell & Mott, Ltd.

Geach, Peter, (1956), "On Frege's way out", en *Mind*, vol. 65, núm. 3, pp. 408-409.

Hodes, Harold, (1984), "Logicism and the ontological commitments of arithmetic", en *Journal of Philosophy*, vol. 81, pp. 123-149.

Quine, Willard Von Orman, (1955), "On Frege's way out", en *Mind*. Reproducido en *Selected Logical Papers*, cap. XII, Harvard university Press, 1995.

Ruffino, Marco, (2000), "Extensions as representative objects in Frege's logic", en *Erkenntnis*, núm. 52, pp. 239-252.

de Rouilhan, Philippe, (1988), *Frege. Les Paradoxes de la Représentation*, París, Les Éditions de Minuit.

Shapiro, Stewart, (1997), *Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

Wright, Crispin, (1983), *Frege's Conception of Numbers as objects*, Aberdeen, Aberdeen University Press, col. Scots Philosophical Monographs, vol. 2.