Signos Filosóficos, vol. XI, núm. 21, enero-junio, 2009, pp.73-101

De la posibilidad a la existencia matemática: los casos de Shapiro y de Balaguer

MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO*

Resumen: En este artículo me gustaría concentrarme en al forma de tratar el problema de Benacerraf respecto de la inaccesibilidad de los objetos abstractos. Este es el principio (llamado FBP por Balaguer) que caracteriza a los objetos por axiomas de una teoría de la existencia consistente. Analizo los argumentos de Shapiro y Balaguer en favor de este principio y concluyo que no son suficientemente fuertes para convencer a sus adversarios. Comparo este principio con el argumento de la indispensabilidad de Quine, como una manera de contraste.

Palabras clave: Balaguer, Benacerraf, consistencia, existencia, Shapiro

Abstract: *In this article, I shall concentrate on a way of dealing with the classic Benacerraf's problem concerning the inaccessibility of abstract objects. It is the principle (called FBP by Balaguer) that the objects characterized by the axioms of a consistent theory exist. I explore Shapiro and Balaguer's arguments in favor of this principle and I conclude that they are not strong enough to convince their rivals. I compare this principle with Quine's argument of indispensability, as a way of contrast.*

Key words: Balaguer, Benacerraf, consistency, existence, Shapiro

* Profesor-investigador, Departamento de Filosofía-Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, xamf_mx@yahoo.com

Recepción: 18/09/08 Aceptación: 28/11/08

INTRODUCCIÓN

Entre las formas de resolver el reto que Baruj Benacerraf plantea a la posibilidad del conocimiento matemático, unas suponen que tenemos alguna forma de contacto con los objetos de esta disciplina, sea porque alguna facultad nos permite el acceso al ámbito de las entidades abstractas, sea porque ciertos objetos matemáticos forman parte de nuestro mundo y son directamente perceptibles. Entre las epistemologías que no suponen tal contacto destacan, en la literatura reciente, las que utilizan el argumento de la indispensabilidad de Willard Von Orman Quine y Hilary Putnam y que han sido objeto de minucioso estudio por parte de Mark Colyvan. Esta solución hace a la ontología matemática dependiente de su indispensabilidad en nuestra mejor teoría del mundo, lo que podría parecer un defecto, pues las prácticas de validación de resultados matemáticos son independientes de sus aplicaciones a otras ciencias. Hay otras epistemologías de este segundo tipo que, aunque pertenecen a diferentes escuelas, descansan en el principio de que la consistencia de una teoría implica la existencia de los objetos por ella definidos. Llamemos FBP a este principio (como lo hace Mark Balaguer). Evidentemente, si FBP fuese cierto, habría un modo de resolver el problema de Benacerraf, siempre y cuando el conocimiento de la consistencia de una teoría no supusiera a su vez un conocimiento de objetos abstractos. Además, de esta forma, se evitaría el defecto que parece tener la solución Quine-Putnam. El objetivo de este ensayo será examinar si dos autores contemporáneos que esgrimen y analizan FBP, a saber, Stewart Shapiro y Balaguer, tienen argumentos en su favor.

No examinaré si se han dado argumentos para sostener que la validez de FBP implica alguna ventaja epistemológica, es decir, si hay alguna explicación de que tengamos un conocimiento lógico que no requiera conocimiento de objetos abstractos, de tal manera que podamos saber de algunas teorías que son consistentes y, si aceptamos ese principio, podríamos así explicar nuestro conocimiento de objetos abstractos. Esta segunda cuestión es más general, porque concierne no sólo a platónicos y estructuralistas, como los dos ya mencionados, sino también a algunos nominalistas o ficcionalistas que, sin aceptar que tengamos conocimiento de objetos abstractos, suponen que el conocimiento matemático es, en última instancia, conocimiento lógico.[1]

Después de esta introducción dedicaré una sección a Shapiro y otra a Balaguer. Ambas serán en su mayor parte descriptivas, pues es necesario esclarecer cómo entiende cada uno las nociones relevantes (tales como *consistencia*, *existencia* o *matemática*) que entran en su formulación de FBP. Veremos las peculiaridades de cada caso.

En la sección final compararé esta forma de superar el reto de Benacerraf con el argumento de la indispensabilidad de Quine y Putnam, pues ambos pasan de una virtud metodológica (la consistencia, de un lado, y ser la mejor teoría, del otro) a una conclusión ontológica (que existen los objetos matemáticos). Concluiré que, Balaguer y Shapiro, no nos ofrecen buenas razones para aceptar FBP y que, en cambio, el argumento de Quine se halla asentado en un marco filosófico que posibilita su justificación.

Según sé, fue David Hilbert el primero en adoptar explícitamente FBP. En un pasaje de su correspondencia con Frege dice: "tú escribes... 'De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen unos a otros...' Yo he estado diciendo el opuesto exacto: si los axiomas arbitrariamente dados no se contradicen unos a otros con todas sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Éste es para mí el criterio de verdad y existencia" (carta de Hilbert a Frege, 29/12/1899 en Frege, 1980: 39). Desde luego hay varias interpretaciones posibles de este pasaje. Podría pensarse que Hilbert se refiere a algo así como consistencia sintáctica o semántica[2] o a una noción intuitiva de consistencia y que alude a existencia real o bien a existencia en el sentido ficcionalista, es decir, en el sentido en que existen los personajes de una novela, pero nótese que sólo es interesante el principio si nos conduce de consistencia intuitiva o sintáctica a existencia real. No nos detendremos a ver cómo Hilbert utilizó

[1] Para un tratamiento reciente de este tema véase, por ejemplo, Leng, 2007: 84-108.

[2] Desde luego sería anacrónico interpretar a Hilbert como haciendo referencia a nuestro concepto semántico. Me refiero a que podría haber tenido una idea en mente en términos de sustitución de ítems lexicales (o algo similar) o una noción vaga en términos de derivaciones.

este principio, ni si dio argumentos en su favor. Lo que podemos observar, de paso, es que las pruebas de consistencia que da en los *Grundlagen der Geometrie* (que es la obra de la que trata su correspondencia con Frege) parten de la existencia de ciertos modelos para concluir la consistencia de ciertas teorías y, por ello, Frege le responde con razón:

> ¿Hay algún otro medio de demostrar la falta de contradicción además de señalar a un objeto que tiene todas las propiedades? Pero si se nos ofrece tal objeto, no hay necesidad de demostrar de un modo tortuoso que hay tal objeto demostrando primeramente ausencia de contradicción. (Carta a Hilbert, 6/01/1900, en Frege, 1980: 47)

Podría pensarse que el teorema de completitud de Kurt Gödel provee un fundamento a la aserción de Hilbert, pues establece que si $\Gamma\cup\{\alpha\}$ es un conjunto de enunciados de primer orden y si α es consecuencia lógica de Γ, entonces α es derivable de Γ en el CP (cálculo de predicados). O, dicho de otra forma, que si de una teoría de primer orden T es imposible derivar (sintácticamente) una contradicción, entonces T tiene un modelo (numerable). Sin embargo, el teorema no puede ser usado en favor de FBP pues su demostración supone un combinatorialismo metafísico. Más específicamente, si el teorema ha de validar FBP, debemos suponer que un conjunto numerable de objetos (signos) existe y tiene las propiedades y relaciones que arbitrariamente queramos asignarles. Es decir, tenemos que partir de una ontología ya dada.

En 1997, en uno de los textos fundamentales del estructuralismo matemático, Shapiro defiende una idea similar a la de Hilbert:

> Los objetos matemáticos están ligados a estructuras y una estructura existe si hay una axiomatización coherente de ella. Una consecuencia aparentemente útil es que si es posible para una estructura existir, entonces existe. Una vez que estamos satisfechos de que una definición implícita es coherente, no queda ninguna duda de si caracteriza una estructura. (Shapiro, 1997: 134)

Analizaré en la siguiente sección de qué manera Shapiro entiende este principio y qué argumenta en su favor.

EL ESTRUCTURALISMO DE SHAPIRO

Comenzaré esta sección aclarando los términos de la versión de FBP que Shapiro defiende. ¿Qué debemos entender por 'objeto', 'estructura', 'coherente' (o 'posible')?, y ¿a qué tipo de existencia hace referencia FBP? Para arrojar luz sobre estas cuestiones Shapiro adopta un enfoque dialéctico. Conforme usa ciertas nociones las va aclarando. Las primeras formulaciones serán al final meras aproximaciones.

Shapiro defenderá una forma de realismo en ontología y en valor de verdad. Es decir, argumentará que existen los objetos matemáticos y que los enunciados matemáticos significativos tienen un valor de verdad objetivo. Más específicamente sostendrá que los enunciados matemáticos, en su formalización estándar, deben ser tomados literalmente (*at face value*) y, por lo tanto, como haciendo referencia a los valores sobre los que corren sus variables cuantificadas. Así interpretados son verdaderos y los objetos a los que la teoría está ontológicamente comprometida existen.[3] Hay que hacer una aclaración relativa al término 'interpretados' que acabo de usar. Por lo pronto, no hay que confundir el realismo filosófico, que este autor enarbolará, con el del realista ingenuo (*working realist*) el cual es el matemático que "usa o acepta las inferencias y aserciones matemáticas sugeridas por el realismo tradicional y rechazadas por otros por razones filosóficas" (Shapiro, 1997: 38) (como definiciones impredicativas, axioma de elección, extensionalidad general, funciones y conjuntos arbitrarios, lógica clásica). Es decir, para el realista ingenuo, las matemáticas deben (o pueden) ser desarrolladas como si el platonismo fuese correcto, pero no pretende realmente contestar preguntas filosóficas, por ejemplo, averiguar de qué tratan las matemáticas, o cómo se aprenden, como sí lo intenta el realista filosófico. La tarea del filósofo es interpretativa:

> Aunque pueda ser desorientador ponerlo de ese modo, la tarea primaria de la filosofía es interpretar las matemáticas y así iluminar su lugar en nuestra perspectiva del mundo [...] ¿qué significan las aserciones matemáticas? ¿Cuál es su forma lógica? ¿Cuál es la mejor semántica para el lenguaje matemático? Las

[3] Sin embargo, no utilizará exactamente el criterio ontológico de Quine, sino que propondrá una variante.

respuestas a esas preguntas determinan los términos en los que las otras cuestiones deben ser planteadas. (Shapiro, 1997: 32)

Shapiro se impone la tarea de explicar qué son los objetos matemáticos y cómo es que tenemos conocimiento de ellos, sorteando el reto que Benacerraf impone al realismo. Como ocurre con muchos autores contemporáneos, Shapiro sostiene que este reto sobrevive a la muerte de la teoría causal que sirvió para formularlo originalmente. El dilema se plantea de nuevo porque Shapiro acepta el naturalismo quineano, al menos en la vaga formulación de la metáfora del barco de Otto Neurath, que supone además toda renuncia al fundacionismo. ¿Por qué no resuelve el problema con el argumento de la indispensabilidad? Según él, porque este argumento deja tras sí la cuestión de cómo es que la matemática se aplica, cuestión que hay que responder con anterioridad (Shapiro, 1997: 32). En realidad, aplicar el argumento de la indispensabilidad, como veremos, requiere un marco en que se explique cómo de virtudes metodológicas y metateóricas (la simplicidad o la consistencia) pueden derivarse conclusiones ontológicas.

La vertiente de realismo que defiende Shapiro es el estructuralismo. Ahora bien, es más difícil formular con precisión su principio fundamental que ejemplificar su aplicación en la práctica. En una versión breve, sin grandes precisiones, el eslogan de esta corriente es: "Matemáticas es la ciencia de la estructura", pero cuando nos preguntamos en qué se distingue el realista estructuralista del platónico tradicional, encontramos una dificultad. Este último sostiene que los números existen como los objetos ordinarios. Me gustaría decir que la diferencia es que para el platónico los números existen independientemente unos de otros. Pero esa formulación es incorrecta porque, si los números son considerados como necesarios, nada existe sin ellos. Shapiro dice que tal vez el platónico sostendría que uno puede establecer la esencia de cada número sin referir a otros números. Agrega que si así pudiera articularse esta noción de independencia, el estructuralista la rechazaría: "la esencia de cada número natural está en su relación con los otros" (Shapiro, 1997: 72). Los números no son independientes de la estructura de la que son posiciones, además carecen de composición interna: no tienen otras propiedades que las que resultan en virtud de ocupar posiciones en la estructura de los números naturales. Es importante, para mis consideraciones, el ejemplo que da Michael Resnik y que Stewart Shapiro menciona: un gramático estudia una estructura compleja que supuestamente es la del inglés, pero la confrontación empírica demuestra que no es así. La llamaremos tinglés. "Sin embargo, mucho del conocimiento de nuestro lingüista acerca del tinglés en tanto que patrón permanece; pues él ha logrado describir algún patrón y discutir algunas de sus propiedades" (Resnik, 1982: 101). Así cuando Hartry Field (1980: 31) dice que si hubiera requerido la suposición de un solo número real su proyecto habría fracasado, Shapiro protesta, pues para el estructuralista un número real no puede existir sin todos los demás.

Para aclarar con ejemplos matemáticos qué debe entenderse por 'estructura', Shapiro (1997: 40-41) distingue campos algebraicos de campos no-algebraicos. De los primeros, por ejemplo, la teoría de grupos dice que no son acerca de una única estructura, sino de una clase de estructuras. De los segundos, en cambio (como la aritmética, que son teorías hechas con un modelo estándar en mente), dice que son acerca de una simple estructura. Distingue también *sistema* de *estructura*:

> [...] defino un sistema como una colección de objetos con ciertas relaciones [...] una estructura es la forma abstracta de un sistema, que resalta las interrelaciones entre los objetos, ignorando cualesquiera de sus rasgos que no afectan el cómo se relacionan con otros objetos en el sistema. (Shapiro, 1997: 73-74)

Por ejemplo, la estructura de los números naturales es ejemplificada, entre otros, por el sistema de los numerales de John Von Neumann. En ese sistema el conjunto vacío ocupa el lugar del cero y la función $A \Rightarrow A \cup \{A\}$ ocupa el lugar de la función sucesor. Al respecto podemos adoptar dos perspectivas (Shapiro, 1997: 10). Por ejemplo, si decimos que el presidente de los Estados Unidos tendrá siempre más poder que el vicepresidente, podemos entenderlo como referido a un sistema concreto, es decir, a los individuos que en ese momento ocupan los cargos respectivos. Esa es la perspectiva "lugares-son-oficios". Asimismo podemos entenderlo referido a la estructura misma, es decir, refiriéndonos a que, por la ley de ese país, el presidente está investido de mayor poder que el vicepresidente. Esta es la perspectiva "lugares-son-objetos". En la perspectiva lugares-son-oficios hay una ontología de fondo de los objetos que ocupan los cargos. Esta ontología también puede estar dada por lugares de otras estructuras o por lugares de la misma estructura. Por ello, para Shapiro, la distinción entre oficio y ocupante es relativa, al menos referida a las matemáticas: lo que es un objeto, desde una perspectiva, es un lugar o un oficio, desde otra. La idea de que una estructura provea un sistema en que ella misma se ejemplifica es importante para mis consideraciones. La razón es que, si lo que dice Shapiro es cierto, entonces el matemático al considerar un sistema axiomático consistente (o coherente) no sólo tendrá la garantía de la existencia de una estructura correspondiente, sino también de un sistema que la ejemplifica. La idea puede parecer una trasgresión categórica, pero hay alguna manera de sustentarla. Por ejemplo, parece claro que los lugares pares de la estructura de los números naturales ejemplifican esta misma estructura, si la función $f(x)=x+2$ ocupa el puesto de la función sucesor. ¿Por qué no entonces pensar que esa estructura se ejemplifica a sí misma? Michael Hand (1993) ha objetado que surge aquí el problema del tercer hombre: si la estructura E es ejemplificada por el sistema S y por el sistema E, entonces debe haber una estructura E', que tanto E como S ejemplifiquen. La respuesta de Shapiro es que E=E'. Creo que el problema es que Shapiro quiere considerar las posiciones en las estructuras como objetos. Volveré más adelante a este punto.

Ahora FBP se aplicará a estructura matemáticas. ¿Sólo a ellas? Sí, aunque Shapiro no se pronuncia explícitamente al respecto. En todo caso, ¿qué distingue a las estructuras matemáticas? Que son independientes (*freestanding*) (Shapiro, 1997: 100), es decir, que cualquier cosa puede ocupar un oficio determinado en una estructura matemática. Los requerimientos son solamente que se mantengan ciertas relaciones entre ese objeto y otros, y que estas relaciones sean formales. Por ejemplo, once personas cualesquiera no forman un equipo de fútbol, pues puede ocurrir que no estén dispuestas a jugar o que estén en canchas diferentes. Estar en la misma cancha es una relación no formal. En cambio, cada una de ellas podría ser el elemento neutro de un grupo, si mantiene con otros individuos u objetos determinado tipo de relaciones. Shapiro (1997: 99) da una caracterización de lo que aquí debe entenderse por 'formal',[4] pero no es necesario que abordemos el tema.

[4] Se trata de la definición tarskiana.

Para mis consideraciones es básica la distinción entre dos tipos de estructuralismo (Shapiro, 1997: 84-90). Puesto que una estructura es como un universal, puede ser vista a la manera de Platón o de modo aristotélico. En el primer caso, sería independiente de los objetos que ocupan los lugares en los diversos sistemas que la ejemplifican. Esta es la perspectiva *ante rem*. O puede considerársele como no siendo nada independientemente de los sistemas que la ejemplifican. Esta es la perspectiva *in re*. El estructuralismo que adopta el primer punto de vista es llamado mítico (por Dummett) o *ante rem* (por Shapiro). El segundo tipo de estructuralismo adopta la última perspectiva y es llamado eliminativo o *in re* (por Parsons y por Shapiro). En este caso, al determinar el valor semántico de un enunciado matemático, éste no es tomado literalmente (*at face value*). Sus aparentes términos singulares enmascaran variables acotadas implícitas que corren sobre los objetos de sistemas que tienen esta estructura. Así, si la semántica de un enunciado aritmético ϕ viene dada por su paráfrasis ϕ':

> "Para cualquier sistema S, si S ejemplifica la estructura de los números naturales, entonces $\phi[S]$, donde $\phi[S]$ es obtenido de ϕ interpretando los términos no-lógicos y restringiendo las variables a los objetos de S".

Este estructuralismo tiene dos variantes. La primera, la opción ontológica, supone que hay una ontología de fondo que suministra los objetos de los diversos sistemas. Esta opción no interesa para los propósitos de este artículo, pues no supone que existan las estructuras y, en cambio, sí que hay un conjunto de objetos matemáticos cuya existencia no fue probada por consistencia, sino que se encuentra ya dada de alguna otra forma. De igual manera no podemos decir que los objetos matemáticos estén definidos por los axiomas, si por esto se entiende que no tienen otras propiedades que las que les confieren los axiomas, pues, en esta opción, ni siquiera se pretende que un sistema axiomático sea satisfecho por un único sistema. La única excepción podría radicar en la manera de sustentar la existencia de la ontología de fondo, si, por ejemplo, se sostuviera que los objetos de esta ontología existen (o sabemos de su existencia) porque la teoría de fondo es consistente. La principal objeción a esta variante es que requerimos una ontología de fondo muy grande, para que pueda ejemplificar la jerarquía de Zermelo Fraenkel Choice (ZFC).

La segunda especie del estructuralismo *in re* es la opción modal. En ésta, la paráfrasis de un enunciado aritmético S está dada como antes, excepto que adjuntamos a ‘sistema’ la palabra ‘posible’. El aritmético trata de sistemas posibles que ejemplificarían la estructura de los números naturales. FBP se convierte aquí en “existen los sistemas que satisfacen a un sistema axiomático consistente”. Pero Goeffrey Hellman, quien desarrolló esta opción, no sostuvo FBP, ni era plausible que lo hiciera. El defensor del estructuralismo modal no desea anular las distinciones modales. Justamente evita los problemas de la existencia matemática apelando a la noción de posibilidad. Por tanto, esta versión no nos concierne aquí.

Shapiro favorece la opción *ante rem* del estructuralismo y para ello ofrece FBP como criterio (o tal vez como definición) de existencia matemática. En este caso, las estructuras (caracterizadas por sistemas axiomáticos consistentes) existen, sean o no ejemplificadas en un sistema. Los enunciados matemáticos se interpretan del modo “lugares-son-objetos” (es decir, literalmente). Además, como vimos, cada estructura se ejemplifica a sí misma. El problema es ¿qué criterio de identidad tienen las estructuras? O, dicho de otra forma, ¿cuándo consideraremos que dos sistemas ejemplifican la misma estructura? Resnik (1997: 20) piensa que no hay respuesta a esto porque no hay un *fact of the matter* a este respecto. Shapiro, más respetuoso del principio quineano (*ninguna entidad sin identidad*) intenta responder a la cuestión. El isomorfismo no funciona porque quisiéramos decir, por ejemplo, que <N, +, x> es la misma estructura que <N, <, +, x> aunque no son isomorfas. La propuesta de Resnik (1981) es que se considere que dos estructuras t y t’ son *equivalentes,* si t’ es isomorfa a t”, donde t” es una extensión que se obtiene de t agregando a t, como términos primitivos, términos que pueden ser definidos en función de los recursos expresivos de t. Así “<” puede ser definida en términos de “+”. Cualquier estructura isomorfa a <N, <, +, x> es equivalente a <N, +, x>. Shapiro inmediatamente aclara que la noción de equivalencia de estructuras es caracterizada en términos de definibilidad y es, por lo tanto, relativa a los recursos del metalenguaje. Así, por ejemplo, <N,’> no es equivalente a <N,+, x>, si el metalenguaje es la lógica de primer orden, pero sí lo es, en segundo orden. A Shapiro no le preocupa esta situación a pesar de que parece ir contra los principios básicos del realismo: “la dependencia de una teoría de fondo y, en particular, de su lenguaje, no debería ser sorprendente. Un tema recurrente de este libro es que un gran número de asuntos ontológicos son dependientes de recursos lingüísticos" (1997: 91). Más adelante retomaré este punto. De todas formas Shapiro no adopta el criterio propuesto por Resnik, ni acepta que no hay hechos concernientes a la identidad de estructuras. Su posición es que, aunque es una materia medio de descubrimiento y medio de decisión, tenemos que decidir por un criterio de identidad. ¿Cómo hacerlo? Toma "identidad de estructuras" como primitivo y estipula que dos estructuras isomorfas son iguales. Agrega que, por razones técnicas, no conviene identificar estructuras equivalentes (Shapiro, 1997: 93).[5]

Shapiro esboza una teoría de estructuras que es una axiomatización en segundo orden del marco central de la teoría de modelos. Adopta un lenguaje de fondo de segundo orden porque requiere hablar de relaciones y funciones de los lugares. No es necesario entrar en el detalle. Baste decir que un axioma central en la teoría es:

> "Si ϕ es una fórmula coherente en un lenguaje de segundo orden, entonces hay una estructura que satisface ϕ",

donde *coherente* es un término indefinido, sobre el que más adelante Shapiro hará algunas aclaraciones. Aunque 'coherente' es un sucedáneo de 'consistente', no puede decir que son sinónimos, pues en segundo orden hay teorías consistentes que no son satisfacibles. Es decir, "consistencia implica existencia" es un principio falso. ¿Por qué no definir 'coherente' como satisfacible? Porque la satisfacibilidad es usualmente formulada en términos de teoría de conjuntos y de existencia.

Adviértase que la opción adoptada por Shapiro elude el problema de que una teoría axiomática no caracteriza un único sistema. Si la teoría es categórica (como frecuentemente ocurre en segundo orden) todos los sistemas que la satisfacen son isomorfos y, por tanto, el sistema caracteriza una única estructura. Esto conlleva el que la denotación de un término matemático singular (es decir, el oficio en la estructura correspondiente) esté completamente definida por los axiomas y que es al menos dudoso que dos sistemas axiomáticos no trivialmente equivalentes se estén refi-

[5] No sé a qué dificultad se refiere.

riendo a los mismos objetos. Es decir, los objetos matemáticos son relativos a una teoría. Al agregar un axioma independiente a un sistema estamos cambiando el significado de los términos definidos implícitamente. Ahora bien, al demostrar un teorema ¿ocurre lo mismo? Al parecer no, pues para Shapiro la lógica es formal y, por tanto, neutral al tema. Ilustremos esta diferencia con un ejemplo. Supongamos que hay un predicado A(x) en una teoría axiomática T. Consideremos dos casos. En el primero un matemático demuestra '$(\exists x)A(x)$' con los axiomas de T. En el segundo, un matemático demuestra que no es posible probar '$\sim(\exists x)A(x)$' y, por tanto, que la teoría $T' = T \cup \{(\exists x)A(x)\}$ es consistente. ¿Han probado lo mismo, a saber, la existencia de un objeto que satisface 'A(x)'? No, porque el significado de A está dado, en un caso por los axiomas de T y, en otro, por los axiomas de T'.

Shapiro (1997: 81) agrega que los enunciados de identidad interestructurales no tienen sentido o su valor de verdad depende de una estipulación. Así evita el problema de Frege y de Benacerraf: ¿es $\{\{\emptyset\}\}$ el número 2? Se puede entender la cuestión como ¿ocupa $\{\{\emptyset\}\}$ el número 2? Y entonces la respuesta será relativa a un sistema del que $\{\{\emptyset\}\}$ forma parte. O puede entenderse como identidad estricta en cuyo caso la respuesta no tiene sentido, aunque hay casos en que el matemático puede estipular por conveniencia la identificación de tales objetos. Charles Chihara (2004: 76) ve aquí una dificultad. Tanto $\{\{\emptyset\}\}$ como el número 2 forman parte de la ontología de la teoría de estructuras y, como tales, serán iguales o distintos, pues Shapiro defiende que no hay entidad sin identidad. Considero que estrictamente hablando tendría que decir que son distintos, pues están definidos por teorías axiomáticas no equivalentes. Es cierto que, después, el matemático puede estipular que son iguales y así dar otro sentido a la identidad y a la diferencia.

Por 'lógica' entiende Shapiro la lógica clásica de segundo orden. ¿En qué se basa para esta elección? En lo que se refiere al segundo orden, se basa en que el matemático distingue modelos estándar de otros modelos, lo que no sería posible si su lenguaje fuese de primer orden:

> Los matemáticos comúnmente hacen y explotan esta distinción y yo presumo que no se están engañando. En el caso de la aritmética, o los recursos informales van más allá de los capturados en la lógica formal, o tenemos una captación

> suficiente del axioma de inducción de segundo orden. Esto es, entendemos el cuantificador de segundo orden lo suficiente para ver que todos los modelos de la aritmética son categóricos. (Shapiro, 1997: 133)

Shapiro insistirá en que los tres tipos de estructuralismo son, desde cierto punto de vista, equivalentes pero, como hemos visto, no lo son desde un punto de vista filosófico.

Es en el capítulo dedicado a la epistemología donde la relación entre coherencia y existencia es tratada más profusamente. Shapiro intentará dar una explicación de la existencia de estructuras de acuerdo con la cual la habilidad para discutir coherentemente una estructura es evidencia de que esa estructura existe. "El argumento en favor del realismo es una inferencia a la mejor explicación. La naturaleza de ciertas estructuras garantiza que ciertas experiencias cuentan como evidencia de su existencia" (Shapiro, 1997: 118).

Además del reconocimiento de patrones finitos, de la extrapolación a patrones infinitos a partir de una serie dada de patrones finitos y de pasar de una relación de equivalencia a la partición generada por ella, tal vez el método privilegiado del matemático de acceder a estructuras, sobre todo a las grandes, es a través de la definición implícita, es decir, la definición axiomática. Ésta es una descripción que permite al interlocutor entender de qué estructura estamos hablando (aunque podría creer que nos estamos refiriendo a un sistema particular). Se puede así describir exitosamente una estructura aún si no se da ningún ejemplo de ella. Dicha estructura (si existe) es naturalmente construida como *ante rem* pues, al describirla, se usan términos singulares para denotar a los lugares respectivos, no a sus posibles ocupantes.

Ahora bien, como ya se dijo, en lógica de segundo orden la consistencia no es garantía de existencia. El ejemplo, dado por Shapiro (1997: 135), es el siguiente: sea P la conjunción de los axiomas de la aritmética (en segundo orden), tome $S=P+\neg G$, donde G es el enunciado que afirma la consistencia de P. S es consistente (por Gödel), pero no tiene modelos. Claramente S no es una definición implícita coherente de una estructura, a pesar de su consistencia deductiva. Definir 'coherencia' como la existencia de una estructura en la teoría de las estructuras no funciona, pues no sabemos si ésta es coherente, además de que uno de los axiomas invoca la noción de coherencia. Shapiro (1997: 135) piensa que no hay manera de salir del círculo y toma 'coherencia' como una noción intuitiva, primitiva. Pero defiende su elección: no estamos en la oscuridad total respecto de esta noción no definida: 'Coherencia' puede al menos ser *completamente* explicada. Dice Shapiro que la noción teórico-conjuntista de satisfacibilidad es un buen modelo matemático de 'coherencia', pues captura mucho de la estructura de la coherencia. Según él, estamos en una situación análoga a la tesis de Alonzo Church.

¿COHERENCIA IMPLICA EXISTENCIA?

Ahora hemos aclarado suficientemente cada uno de los términos que aparecen en la versión de FBP que Shapiro defiende, a saber, que los objetos matemáticos están ligados a estructuras y que una estructura matemática existe si hay una axiomatización coherente de ella. Antes que nada una aclaración: ya había expresado un recelo concerniente a la incompatibilidad entre el realismo y la dependencia del lenguaje que tienen los objetos. El realista ordinariamente defiende que existen objetos independientemente de nuestros medios para aprehenderlos, de nuestras capacidades cognoscitivas y de nuestro lenguaje. Shapiro aclara que nosotros no creamos los objetos, sino que los aprehendemos a través del lenguaje. Esto haría pensar que es sólo la aprehensión de los objetos la que depende del lenguaje. Sin embargo, las cosas no son tan claras. Para Shapiro, de qué manera el mundo queda dividido en objetos depende de con qué lenguaje lo describamos, así es que su realismo es singular. No lo sería si sostuviera que nuestro lenguaje, aunque uno entre muchos posibles, es objetivo e independiente de nuestras habilidades cognitivas.

Veamos ahora un argumento en favor de FBP. Aunque Shapiro había dicho que la semántica de la teoría de modelos es una herramienta apropiada para el realismo, también reconoce que por sí sola no dice nada sobre el problema de qué conecta a un nombre con su denotación. Sólo determina las relaciones entre las condiciones de verdad, las extensiones de predicados y las extensiones de la terminología lógica. "La teoría de modelos es una definición funcional (o estructural) de esos términos semánticos, a la que no le incube cómo la referencia se lleva a cabo o qué teoría a este respecto es verdadera" (Shapiro, 1997: 139). En la teoría de modelos, la noción de 'referencia' o 'designación' es primitiva. Necesitamos suplementarla con una teoría adecuada de la referencia para tener una "aproximación decente a las condiciones de verdad de enunciados del lenguaje natural que pueden ser parafraseadas por fórmulas de un lenguaje formal" (Shapiro, 1997: 140). Y ahora viene el paso decisivo:

> Puesto que las matemáticas son la ciencia de la estructura, las nociones "esquemáticas" o estructurales de la teoría de modelos son todo lo que necesitamos. Los detalles de la explicación correcta de la referencia a objetos físicos son irrelevantes [...] Como notamos, un estudiante ya entiende referencia y cuantificación, al menos esquemáticamente: puede no saber que *hay* modelos de la teoría, pero capta lo que sería para un sistema ser uno de tales modelos [...] Ahora, como la teoría [del análisis real] es categórica y coherente, todos sus modelos comparten estructura común. La sugerencia de este libro es que pensemos del análisis real como siendo acerca de esta estructura. Sus variables corren sobre los lugares de esa estructura, y sus términos singulares se refieren a algunos de esos lugares. Saber qué sería para un sistema ser un modelo de los axiomas *es* saber qué estructura es el análisis real. Conocimiento esquemático acerca del funcionamiento del lenguaje guía a conocimiento de estructuras [...] Finalizamos con una interpretación modelo-teórica del análisis. Las variables corren sobre los lugares de una estructura, y los términos singulares se refieren a lugares individuales en esa estructura. El resto es la familiar semántica modelo-teórica. Una vez que nos damos cuenta de lo que es la ontología, tenemos realismo en ontología [...] Si insistimos en una caracterización categórica de las teorías no algebraicas, entonces también tenemos realismo en valor de verdad. (Shapiro, 1997: 140)

He citado *in extenso* este pasaje porque creo que en él se encuentra el principal argumento de nuestro autor en favor de su versión de FBP. Ya Shapiro había dicho que el principal medio de acceso al conocimiento de estructuras matemáticas está dado por el lenguaje. Ahora agrega una conclusión ontológica. La idea, si entiendo bien, es que la teoría de modelos no nos da más que un esquema, una caracterización de la estructura de los conceptos semánticos. Por ejemplo, independientemente de cómo expliquemos la referencia o de cómo ésta se logre, 'F(a)' es verdadero si aquello a lo que ‘a’ refiere tiene la propiedad a la que ‘F’ se refiere o expresa. Aquí sólo vemos cómo ‘referencia’ y ‘verdad’ están relacionadas entre sí, por lo que estamos aún obligados a dar una teoría que explique al menos uno de estos conceptos semánticos. En una teoría ordinaria tal explicación es necesaria si queremos tener la garantía de que los términos realmente refieren, es decir, de que designan cosas existentes. Claro, también podríamos tener una teoría semántica que explique cómo se produce la referencia, pero que no nos asegure que, en un caso específico, tengamos conocimiento de que los términos singulares verdaderamente refieren. Lo que Shapiro dice es que el caso de las matemáticas es distinto. Allí no requerimos de ninguna teoría de la referencia. El estudiante que tiene un sistema axiomático (coherente y categórico) para el Análisis inicialmente no tendrá ninguna garantía de que exista un sistema que satisfaga esos axiomas, pero sabe lo que eso significaría. Lo importante es que no requiere de nada más. El entender qué sería para un sistema satisfacer esa estructura le pone ante sí la estructura misma y, puesto que la matemática no se interesa en los sistemas, sino en la estructura, el matemático tiene la garantía de tener completo su objeto de estudio. Y, según la versión de Shapiro, ya que cada estructura U proporciona un sistema que satisface U, también tiene la garantía de que existe un sistema tal. Suponiendo que ese sea el argumento de nuestro autor, ¿cómo entra aquí la coherencia? Tal vez podría sostenerse que si la teoría axiomática es incoherente, el estudiante no sabe qué sería para un sistema satisfacer la estructura correspondiente porque, de hecho, no hay ninguna estructura que esté siendo descrita, aunque él crea que sí lo sabe. Y viceversa, si la teoría axiomática es coherente, el estudiante puede entender lo que significaría para un sistema satisfacerla, aunque él crea que no es coherente.

Vemos por qué FBP sólo vale para estructuras matemáticas. En otras disciplinas sí nos interesan los sistemas y la esencia de los objetos más allá de sus propiedades estructurales. Si una estructura no es matemática, son constitutivas de ella relaciones de contenido (no formales) que no están plasmadas en axiomas matemáticos.

El argumento no podrá convencer a un nominalista, ni a un partidario de las otras formas de estructuralismo. El caso es análogo al de la disputa entre nominalismo y universalismo. Consideremos a un defensor de esta variante que esbozara el siguiente argumento: sólo nos interesan ahora los conceptos y supongamos que tenemos una definición consistente de un concepto. Entonces no sabemos si algún objeto cae bajo el concepto, pero sí lo que sería que el concepto subsumiera un objeto. Por tanto, no necesitamos nada más y podemos concluir que el concepto existe. La analogía es clara: una estructura es una red conceptual. Cada hueco en la estructura es una especie de concepto (aunque no independiente de los otros conceptos de la estructura) que se aplica a objetos de sistemas diversos. El partidario de la opción *ante rem* considera esos conceptos (sólo definidos por sus interrelaciones mutuas) como los objetos de su teoría y, si la teoría es coherente entendemos lo que sería para un sistema ser un ejemplo de esa estructura. Eso no significa que haya tal sistema ni, aunque lo hubiera, que hayamos demostrado la existencia independiente de la estructura. De hecho, Goeffrey Hellman (1999: 925) ha criticado a Shapiro el paso de "comparten una estructura común" (sistemas posibles, en la versión del estructuralista modal) a "hay una estructura compartida por todos los sistemas". Desde luego, el problema para el estructuralismo ontológico (la primera versión) es el mismo, si pretende usar FBP para justificar la existencia de su teoría de fondo.

Del párrafo citado está claro que Shapiro no identifica coherencia con la existencia de un sistema satisfaciendo la estructura correspondiente (aunque haya dicho que la satisfacibilidad era un buen *explicatum* de la noción de coherencia). Si lo hubiera hecho, aún no está claro cómo eso demostraría al nominalista que está en un error.

Ahora bien, pudiera ser que Shapiro no esté entendiendo *existencia* en un sentido fuerte. John Burgess (1999) argumenta que la distinción entre el realista ingenuo del realista filosófico es el paso de, por ejemplo:

> Hay un número primo mayor que un gogolplex

a

> Existe un número que satisface 'x es primo y mayor que un gogolplex'

La semántica tarskiana hace trivial ese paso y, por eso cree Burgess, Shapiro defiende que la semántica modelo-teórico o tarskiana es la esencia del realismo. Sin embargo, se pregunta Burgess, y no puede encontrar la respuesta en el texto de Shapiro, si debe aquí entenderse la verdad en el sentido decitacional o en un sentido robusto; y si debe entenderse 'existencia' en el sentido interno de Carnap o en un sentido más fuerte. Sin embargo, si fuese lo primero, no habría mucha distinción entre el realismo ingenuo y el filosófico. En todo caso, la versión de FBP citada no sería muy interesante.

En un párrafo antes citado, Shapiro dice que el argumento en favor del realismo es una inferencia a la mejor explicación. Esto parecería aludir a otra prueba de FBP. ¿Cuál es ésta? Chihara dice:

> Yo no puedo encontrar en ninguna parte en el libro de Shapiro un argumento *explícito* para creer en el tipo de formas abstractas o estructuras que postula. Sin embargo, él da una justificación implícita para aceptar sus opiniones *ante rem* de las matemáticas. Su estrategia básica es socavar a los principales rivales nominalistas a su explicación realista de las matemáticas y entonces argüir que es la más perspicua explicación de las matemáticas disponible. (Chihara, 2004: 71)

Aparentemente, para determinar si este argumento sirve a sus fines, sería necesario examinar, como hace Chihara, si el estructuralismo *ante rem* ofrece la mejor explicación de las matemáticas y, en particular, si las críticas a otras posiciones son sólidas. Sin embargo, creo que la cuestión es más sencilla. Puede alegarse que el argumento es circular. En efecto, Shapiro sostiene que las tres versiones del estructuralismo son equivalentes porque enfrentan problemas del mismo nivel de dificultad. Concentrémonos por ahora en el estructuralismo modal. A esa corriente le surge también el problema de cómo definir 'consistencia' o 'posibilidad lógica'. Tendrá que tomarlo como indefinido (como hizo su colega *ante rem*) y deberá explicar cómo sabemos que un sistema axiomático es consistente sin invocar conocimiento de objetos matemáticos abstractos. A pesar de esta equivalencia, Shapiro opta por la opción *ante rem* "por ser la más perspicua". Supongamos que alguien tiene tendencias nominalistas (sea porque gusta de los *paisajes desérticos*, como Quine, o porque el argumento de Benacerraf le convence, como a Field), entonces pensará que FBP es falsa y que, a pesar de las dificultades equivalentes que enfrentan, el estructuralismo eliminativo o modal es preferible a la versión *ante rem*, justamente porque no implica FBP.

La conclusión es que Shapiro no tiene un argumento sólido en favor de FBP que pueda convencer a sus rivales.

EL PLATONISMO DE BALAGUER

En su libro *Platonism and Anti-platonism in Mathematics*, Balaguer (1998) sostiene que el platónico puede responder satisfactoriamente a los retos de Benacerraf siempre y cuando adopte el principio FBP (*Full Blooded Platonism*). Sin embargo, Balaguer no provee una defensa del platonismo, pues sostiene que también el anti-platonismo puede superar las objeciones que comúnmente se le hacen. Concluirá que no hay *fact of the matter* que decida entre platonismo y antiplatonismo.

No nos interesaremos ahora por la conclusión general del libro de Balaguer, ni por las objeciones que pone a otro tipo de platonismos, sino únicamente por su defensa de FBP. El platonismo es descrito como una teoría constituida por dos tesis (Balaguer, 1998: 5): a) existen objetos matemáticos, tales como los números, independientemente de nuestro teorizar y b) nuestras teorías matemáticas describen tales objetos. FBP: es la tesis de que todos los objetos matemáticos (lógicamente) posibles existen.

Con el propósito de esclarecer FBP, Balaguer (1998: 6) hace tres intentos infructuosos de formalizarla. Por ejemplo, la primera reformulación diría:

> Para cualquier objeto matemático, si es posible que exista, entonces existe. El problema es que parece sugerir que la existencia es un predicado y que hay objetos que no existen. Balaguer quiere distanciarse de ambas cosas.

El segundo intento es:

> Para cualquier propiedad si es posible que exista un objeto matemático y tenga esa propiedad, entonces existe un objeto matemático y tiene esa propiedad.

Balaguer encuentra deficiente esta formulación porque, según él, no tiene ningún compromiso ontológico,[6] pero, nótese que esta formulación no dice, ni de lejos, lo que FBP, pues concedido su antecedente para una propiedad determinada, su consecuente asegura la existencia de *un* objeto (posiblemente otro) con esa propiedad. No tenemos el universo lleno del FBP. Nada importante depende de la formalización, sólo es un ejerci-

[6] Ignoro por qué dice esto Balaguer.

cio clarificador, pero lo interesante, dado lo que sigue, es la diferencia con el estructuralista: lo que parece estar en cuestión aquí es la existencia de un objeto individual independientemente de lo que ocurre con los demás.

Según Balaguer (1998: 7-8), Hilbert, Poincaré, Resnik y Shapiro han defendido algo similar a FBP, pero él considera que esto no es explícito en los dos primeros casos, y no parece serlo en el tercero (pues Resnik evita la noción de *posible* y no piensa en las estructuras como entidades) y sólo queda Shapiro, con quien compararemos más adelante.

¿Cómo FBP explica el conocimiento de objetos abstractos? La idea es sencilla: para adquirir conocimiento de objetos matemáticos abstractos todo lo que necesitamos hacer es adquirir conocimiento de que alguna teoría matemática es consistente. Field (citado en Balaguer, 1998: 49) ilustra el problema de Benacerraf con un símil: ¿cómo alguien sin ningún contacto con una villa nepalesa puede saber lo que allí pasa? La réplica de Balaguer es que no habría ninguna dificultad si todas las villas nepaleses posibles existieran. Desde luego, nos falta aclara la expresión *posible*.

Hay una distinción que Balaguer (1998: 49) hace y que introduce cierta ambigüedad en su proyecto. Dice que uno tiene una creencia que es fuertemente acerca de un objeto sólo si uno está conectado a él de una manera apropiada, mientras que para tener una creencia que es débilmente acerca de un objeto no es necesaria tal conexión. En este sentido uno puede tener creencias que son débilmente acerca de Santa Claus. Y agrega: "Pero mi explicación del conocimiento matemático va estar basada solamente en la aseveración de que nosotros podemos formular creencias y teorías que son débilmente acerca de objetos matemáticos" (Balaguer, 1998: 50).

Ahora bien, que el conocimiento humano es sólo débilmente acerca de objetos matemáticos parece entonces que puede entenderse de dos maneras: que se produce sin contacto entre las partes o que el objeto conocido no existe. Lo primero debe ser cierto, si Balaguer tiene razón en lo que dice sobre las posibilidades que le quedan al platónico. Si fuese lo segundo, el platonismo que aquí se defiende no sería muy interesante. Aunque no hay mayores aclaraciones en el texto, parece ser que Balaguer entiende esta diferencia de otra forma. A la objeción de que aún una teoría categórica no caracteriza un solo dominio matemático, él responde que así es:

> [...] no pienso que haya una única colección de objetos que corresponda a lo que tenemos en mente cuando formulamos nuestras creencias y teorías matemáticas; en otras palabras, no pienso que ninguna de nuestras teorías o creencias sean "acerca" de ningún objeto matemático en ningún sentido fuerte del término. (Balaguer, 1998: 50)

Este párrafo sugiere que un término refiere débilmente a un objeto X si señala a X por propiedades generales que otro objeto también tiene o puede tener.

Sin embargo, adviértase con esta respuesta de Balaguer que no entiende FBP a la manera de Shapiro: la matemática no trata de los hoyos en las estructuras, sino acerca de los sistemas que satisfacen esas estructuras. ¿Es un estructuralista? No, pero la diferencia no será tan evidente, como veremos.

Es obvio que, utilizando FBP, el platónico puede explicar que (como regla general) si un matemático acepta una teoría puramente matemática, entonces esa teoría verdaderamente describe parte de la realidad matemática. No es necesario reproducir el argumento.

Balaguer advierte una peculiaridad de su platonismo: nos da una explicación externalista del conocimiento matemático. Es decir, puesto que el matemático no sabe FBP, no sabe que sus métodos son confiables. Sólo por azar dará con la verdad. Es cierto que el reto de Benacerraf no exige más.

Balaguer no cree que necesite argumentar en favor de FBP, pues su punto es que el partidario de esta doctrina puede responder al reto de Benacerraf. Sin embargo, ofrece algunos elementos en defensa de FBP para que no se diga que ha resuelto el problema epistemológico del platonismo sólo adoptando una versión inviable de esta doctrina. Para ello, veremos cómo responde a algunas de las objeciones que pueden hacerse a FBP.

Tal vez la objeción más obvia es que FBP es inconsistente, pues tanto ZFC como $ZF+\neg C$ son consistentes. La réplica de Balaguer (1998: 59) es que ZFC y $ZF+\neg C$ no describen el mismo tipo de conjuntos. De cualquier manera, ZFC no describe un único universo de conjuntos, pues es verdadero de universos en que vale la hipótesis de continuo y también de universos en que no vale dicha hipótesis. Dos teorías pueden hablar sobre el mismo tipo de conjuntos cuando, por ejemplo, una de ellas resulta de la otra por restricción (consistente) de los cuantificadores de esta última. Como vimos, esto no es posible en la opción del estructuralismo *ante rem*.

Otra objeción es que si FBP fuera cierto, consistencia sería lo mismo que verdad, lo que va en contra de la práctica matemática. La respuesta de Balaguer (1998: 60-61): FBP no implica que todas las teorías matemáticas consistentes sean verdaderas, sino que describen parte del dominio matemático. *Verdadero* en la práctica matemática significa verdadero en el modelo estándar. Si entiendo bien, la idea es que toda teoría matemática consistente describe parte del dominio matemático y, por lo tanto, es verdadera de los objetos en ese dominio. Eso no significa que sea verdadera, pues verdadera *simpliciter* (según Balaguer) es sólo la teoría que es verdadera del modelo estándar en cuestión. Si no hay dominio estándar no hay verdad *simpliciter*. Balaguer puede argumentar que es así como se usa la palabra 'verdadero' en matemáticas, sólo que debería agregar que a veces lo que determina la verdad no es un modelo estándar, sino una colección de modelos que se tienen en mente.

Otra crítica a FBP es que el partidario de este principio es incapaz de explicar que se pueda atribuir un valor de verdad a una proposición indecidible. Para él no tendría sentido preguntarse ¿cuán grande es el continuo? La respuesta de Balaguer (1998: 62-63) es que cuando se pregunta si un axioma establece la hipótesis del continuo es verdadero lo que realmente se está preguntando es si el axioma es inherente a nuestra noción de conjunto (es decir, si es verdadero en el modelo estándar). Incluso FBP puede explicar mejor las proposiciones indecidibles y por qué unas tienen una única respuesta y otras no. Puede pasar que nuestra noción ordinaria de conjunto no sea categórica, que varios modelos de la teoría de conjuntos no mutuamente isomórficos sean estándar. Entonces no habría solución a la hipótesis del continuo, que es lo que opinan muchos matemáticos. Esto no lo podría explicar el platónico tradicional. Además, nuestros conceptos pueden ser vagos y, por tanto, puede no haber una respuesta determinada a si una propiedad es inherente a nuestros conceptos.

Considero que las otras objeciones que Balaguer invoca no son muy relevantes a nuestro tema. En favor del platonismo radical, argumenta (1998: 69) que sobrevive a Benacerraf y que reconcilia la objetividad de las matemáticas con la independencia de esta disciplina respecto de las otras ciencias y con la legitimidad de modos pragmáticos de justificación, es decir, con el hecho de que, por ejemplo, un axioma que tiene más consecuencias o que organiza mejor la teoría es considerado verdadero. Sin embargo, este último punto es dudoso pues ¿qué tendría que ver la fertilidad de una afirmación con su verdad? Si un matemático acepta la teoría consistente T+{A}, hay objetos de los que T+{A} es verdadera, aunque A no sea un axioma fértil.

Podemos observar es que no ha dado una prueba en favor de FBP. Ni es eso lo que pretendía. El punto de Balaguer es sólo mostrar que el platonismo en su versión radical (es decir, con FBP) sobrevive al reto de Benacerraf y que, de hecho, es la única versión de esta doctrina capaz de hacerlo. Todo lo que podría argumentar es que si el platonismo es verdadero, FBP ofrece la mejor explicación del conocimiento matemático (si sus objeciones contra otros platónicos son correctas). Podría invocar un argumento a la mejor explicación, pero se apoyaría en una premisa demasiado fuerte (la validez del platonismo). De otra manera, el argumento sería circular: argumentar que un principio P es verdadero porque es el único (o el mejor) con que puede responderse no-escépticamente a un reto escéptico sería una petición de principio. Por supuesto, Balaguer no comete esta falacia, pues no pretende defender al platónico.

Sin embargo, aún falta determinar con mayor precisión los términos de la versión de FBP que Balaguer esgrime, a saber: "todo objeto matemático posible existe" o "todas las teorías consistentes puramente matemáticas existen". En este caso, no tendremos mayores precisiones sobre lo que debe entenderse por 'objeto' o por 'puramente matemático'. Balaguer sólo discurre sobre el significado de 'consistente', aunque también veremos si su posición no cae dentro de alguna forma de estructuralismo.

Respecto a lo primero, Balaguer (1998: 70) no puede adoptar sin circularidad ni la noción sintáctica, ni la semántica, de 'consistencia', pues ambas son platónicas. Tanto derivaciones como modelos son objetos abstractos. Una posibilidad es utilizar la idea de Georg Kreisel, retomada por Field, de que 'consistencia' sea un término primitivo. Se ha utilizado varias veces el argumento que daré a continuación para demostrar que las tres nociones en cuestión son coextensivas (véase, por ejemplo, Leng, 2007). En ese caso, podemos utilizar los conceptos sintácticos o semánticos de ‘consistencia’ para acceder a la noción intuitiva. El argumento es el siguiente: claramente si T es semánticamente consistente, entonces T es intuitivamente consistente y si T es sintácticamente inconsistente, entonces T es intuitivamente inconsistente. Además, por el teorema de compleción de Gödel, si T es semánticamente consistente, T es sintácticamente consistente. Sin embargo, Balaguer no acepta este argumento. Se basa en el siguiente contraejemplo de Field: la teoría que consiste en todas las verdades acerca de conjuntos que son expresables en el lenguaje de la teoría de conjuntos es obviamente consistente, pero no lo es semánticamente, pues un modelo para tal teoría tendría al conjunto de todos los conjuntos como universo. Una objeción obvia es que esta teoría tiene un modelo (por el teorema de compleción de Gödel). Balaguer (1998: 72) ofrece tres respuestas: a) que este modelo es muy artificial, b) que el resultado no se extiende a teorías de orden superior y c) que el mero hecho de que el resultado no sea trivial, es decir, de que requiera prueba, muestra que la noción semántica no captura la esencia de la noción intuitiva. Creo que esas respuestas no son adecuadas, pues el primer punto es psicológico, el segundo es irrelevante al ejemplo (pues se refiere a una teoría de primer orden) y el último depende de qué entendamos por ‘esencia’ y por ‘definición’. En todo caso, Balaguer (1998: 73) puede adoptar un camino más sencillo: puesto que requiere una noción de consistencia cuyo conocimiento no requiera saber de la existencia de objetos abstractos, adopta la noción de su adversario, es decir, la noción antiplatónica de ‘consistencia’ sea ésta la que fuere. En efecto, su contrincante debe tener una noción con esas características y que, por tanto, no suscita problemas epistémicos (por lo menos, no el de Benacerraf). Es ingenioso, pero hay dos objeciones a este proceder. Una, que el argumento, en el mejor de los casos, podrá convencer al antiplatónico, pero no al agnóstico. Dos, que la noción de consistencia del antiplatónico no necesariamente tiene que coincidir con la del platónico. Por ejemplo, es dudoso que Balaguer aceptara la noción intuicionista de ‘consistencia’. En todo caso, esta opción nos deja en la oscuridad respecto a la *esencia* de esta noción. En otra parte, Balaguer (1998: 71) sugiere que podría adoptar la noción de consistencia de Kreisel, pues, siendo primitiva, no está definida en términos de objetos abstractos y, por lo tanto, es antiplatónica. Claramente este argumento es falaz, además de que, no aceptando que los correspondientes conceptos sintáctico y semántico de consistencia sean una buena réplica de la noción intuitiva, ésta sigue siendo enigmática.

Un punto importante para entender el platonismo esbozado por Balaguer consiste en determinar cómo responde al segundo dilema de Benacerraf y, de paso, veremos cómo distingue su posición de la de Shapiro. El argumento de Benacerraf concluye que los números no son objetos y que, por tanto, el platonismo es falso, del hecho de que hay muchas sucesiones que satisfacen los axiomas de Giuseppe Peano, ninguna de las cuales tiene nada metafísicamente especial que haga de sus miembros la referencia de nuestros términos numéricos. La respuesta de Shapiro, como vimos, es obvia: todas esas sucesiones son isomorfas (pues los axiomas de Peano en segundo orden forman una teoría categórica) y por lo tanto hay una sola estructura caracterizada por esos axiomas y sus lugares son la referencia de nuestros términos numéricos. Como se vio en una cita anterior, Balaguer responde que los axiomas de Peano son débilmente acerca de cada uno de esos sistemas. Eso no obsta para que los números sean objetos. Simplemente la referencia de '2' no es única. Antes de ver cómo esto afecta la versión balagueriana de FBP, veamos por qué este autor no acepta la respuesta de Shapiro.

En una serie de pasajes, Balaguer (1998: 9-10) critica al estructuralista, pero él mismo reconoce que la diferencia con su postura no es muy clara. Por una parte, acepta que los hechos matemáticos importantes son estructurales y no de propiedades internas, y que podemos decir que la matemática descubre estructuras. Por otro lado, encuentra insostenible la aseveración de que los objetos matemáticos sólo tienen propiedades estructurales, es decir, que las posiciones de que habla Shapiro no tienen ninguna otra propiedad excepto aquellas que tienen en virtud de las relaciones con otras posiciones en la misma estructura. La objeción es que 'ser abstracto' es una propiedad no estructural de los objetos matemáticos. Peor aún, la propiedad de sólo tener propiedades relacionales es no relacional. Evidentemente, el blanco de Balaguer es sólo el estructuralismo *ante rem*. La respuesta es sencilla: el matemático no se interesa por el carácter abstracto de los objetos, sino sólo por sus propiedades relacionales. Con ellas constituye nuevos objetos. La cuestión no es tanto quién tiene la razón, sino cómo Balaguer se distingue del estructuralista. Como ya se dijo, él también acepta que el matemático estudia hechos estructurales. El punto —nos dice— es simplemente que al hablar de estructuras no estamos hablando de no-objetos o de objetos sin propiedades internas o que resolvemos algún problema aseverando que los objetos matemáticos pueden ser pensados como posiciones en una estructura. Aparentemente entonces Balaguer puede ser clasificado como estructuralista *in re*, al menos todas sus opiniones son compatibles con esta postura. Todas, excepto una: en la primera formulación de FBP se asegura que si un objeto matemático puede existir, existe. Tal afirmación es inaceptable para un estructuralista. No hallo modo de conciliar estos dos puntos de vista y, a mi juicio, Balaguer vacila entre ellos.

El problema es que no queda nada claro qué debemos entender por FBP fuera del marco estructuralista. ¿Qué significa que un objeto matemático puede existir? ¿Qué una cierta afirmación existencial es lógicamente consistente? ¿Consistente con qué? ¿Según qué lógica? Aun si clasificamos a Balaguer como un estructuralista *in re* quedaría en pie la última cuestión y otras más: que un sistema axiomático sea consistente ¿implica que existe un sistema que puede satisfacerlo?, ¿cuál de estos sistemas?, ¿o existen todos los sistemas que pueden satisfacerlo? Supongamos que nos decidimos por alguna de estas dos versiones. ¿No podríamos decir, al menos, que FBP es altamente plausible, pues, si aceptamos los argumentos de Balaguer, es la única forma de platonismo que sobrevive al reto de Benacerraf? Me parece que la respuesta es negativa. ¿Por qué?

Antes que nada, recordemos que FBP es la forma más radical de platonismo. El aficionado a los paisajes desérticos admitirá algunos objetos abstractos, si eso resulta indispensable para ciertos fines. Sin embargo, no aceptará la totalidad desbordante que le demanda FBP. Una forma tan extrema de compromiso ontológico exige muy buenos argumentos en su favor.

En segundo lugar, el platónico radical tiene otro reto que Balaguer sólo afronta hacia el final del libro. Es el problema de explicar cómo es que las matemáticas se aplican a la realidad física. Como dijimos, Shapiro critica a Quine por haber dejado inexplicada esta cuestión. Ahora bien, sólo los empiristas *à la* Mill o *à la* Maddy tienen un expediente a la mano para salir de la dificultad: la matemática se aplica porque es una ciencia empírica de máxima generalidad. Balaguer piensa que el platónico puede resolver este problema (al igual que su contrincante ficcionalista)[7] adoptando FBP:

> La única razón por la que podría *parecer* sorprendente que la matemática pueda ser usada para establecer un marco descriptivo, o un aparato teórico,[8] en el cual hacer ciencia empírica es que esto parece sugerir que hay una inexplicable *correlación* entre el dominio matemático y el mundo físico. Pero, dentro de FBP esa ilusión se evapora: el dominio matemático es tan robusto que provee un aparato para *todas* las situaciones. (Balaguer, 1997: 143)

Ahora bien, Balaguer piensa que hay otras dificultades similares, pero que están dirigidas a casi todas las filosofías de las matemáticas y que no incumben particularmente a las dos que él ha defendido.[9] Yo creo que en esto se equivoca. El platónico tradicional puede pensar que de la totalidad T de teorías consistentes (puramente matemáticas), sólo una fracción F es verdadera y sólo F resulta aplicable a nuestro mundo. Tal vez pueda decir que F aproximadamente se aplica a nuestro mundo y, por ello, postulamos o descubrimos que F es verdadera. Admito que la explicación no es del todo satisfactoria (excepto en un marco quineano, como diré enseguida), pero hay alguna relación entre verdad y aplicabilidad. Este paso no lo puede dar el defensor de FBP. Si el hombre pudo desarrollar por igual una teoría no estándar de la aritmética que nuestra teoría ordinaria y haber tenido en ambos casos conocimiento del mundo matemático, ¿cómo explicar que todas las culturas hayan desarrollado la misma aritmética y que ésta se aplique a nuestra realidad física? El defensor de FBP, platónico o ficcionalista, sostendrá que es la aritmética estándar la que mejor se

[7] FBP para el nominalista dice simplemente que toda teoría consistente puramente matemática es igual de buena o válida.

[8] Balaguer ha tratado antes de argumentar que ésta es la única función que la matemática tiene en la ciencia empírica.

[9] Balaguer exenta de este reto a los platónicos que no creen en la ineficacia causal de los objetos matemáticos.

amolda a nuestras intuiciones y, casualmente, también a nuestro mundo físico. Y aquí nos hallamos con una dificultad suplementaria, contrariamente a lo que anuncia Balaguer: ¿cómo explicar esta doble concordancia?

CONCLUSIÓN

¿Cómo podría argumentarse en favor de FBP? Comparemos el caso con el del principio de indispensabilidad. Éste también permite el paso del reconocimiento de una virtud metodológica a una afirmación existencial, pues afirma que existen los objetos matemáticos supuestos indispensablemente por nuestra mejor teoría del mundo. Su fuerza radica en su universalidad: de acuerdo con Quine (1953), todos los objetos de nuestro mundo están postulados por nuestras teorías exitosas. Los números existen, como los átomos y como la mesa en que escribo, porque todos son postulados que contribuyen a organizar nuestros datos sensoriales. No hay el problema de la aplicabilidad porque, citando de nuevo a Balaguer, el misterio resultaba de "una inexplicable *correlación* entre el dominio matemático y el mundo físico", pero ese dominio matemático no existía antes de ser aplicado. Puesto que al diseñarlo se reveló satisfactorio en su aplicación, lo postulamos como siendo real. La teoría más eficaz fue declarada verdadera y sus objetos reales. Ahora bien, para FBP no tenemos un marco similar.

Mejor dicho, ni Shapiro ni Balaguer han provisto de un marco filosófico en el que justificar o, al menos, hacer plausible la forma más extrema de platonismo. No encontramos en FBP ninguna solución al reto de Benacerraf.

BIBLIOGRAFÍA

Balaguer, Mark (1998), *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford University Press.

Burgess, John (1999), "Book review: Stewart Shapiro. Philosophy of mathematics. Structure and ontology", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 40, núm. 2, pp. 283-291.

Chihara, Charles (2004), *A Structural Account of Mathematics*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford University Press.

Field, Hartry (1980), *Science Without Numbers*, Nueva Jersey, Estados Unidos, Princeton University Press.

Frege, Gottlob (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Chicago, Estados Unidos, The University of Chicago Press.

Hand, Michael (1993), "Mathematical structuralism and the third man", *Canadian Journal of Philosophy*, núm. 23, pp. 179-192.

Hellman, Geoffrey (1999), "(Review untitled) Stewart Shapiro. Philosophy of mathematics. Structure and ontology", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 64, núm. 2, pp. 923-926.

Hellman, Geoffrey (2005), "Structuralism", en Shapiro Stewart (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford University Press, pp. 536-562.

Leng, Mary (2007), "What's there to know", en Mary Leng, Alexander Paseau y Michael Potter (eds.), *Mathematical Knowledge*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford University Press, pp. 84-108.

Quine, Willard Van Orman (1953), *From a Logical Point of View*, Massachusetts, Estados Unidos, Harvard University Press.

Resnik, Michael (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford Clarendon.

Resnik, Michael (1982), "Mathematics as a science of patterns: Epistemology", *Nous*, núm. 16, pp. 95-105.

Resnik, Michael (1981), "Mathematics as a science of patterns: Ontology and reference", *Nous*, núm. 15, pp. 529-550.

Shapiro, Stewart (1997), *Philosophy of Mathematics, Structure and Ontology*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford University Press.

Max Fernández de Castro: es matemático, maestro en filosofía y doctor en filosofía por la Universidad de París I. Profesor de tiempo completo del Departamento de Filosofía de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Ha escrito varios artículos de Lógica, Filosofía de las Matemáticas y Filosofía de la Lógica. Autor del libro *Quine y la ontología abstracta* (México, UAM-I/Porrúa) y coautor del libro *Lógica proposicional, intuicionista y modal* I (en prensa).