Signos Filosóficos, vol. XIII, núm. 25, enero-junio, 2011, pp. 9-45

Lógica, matemáticas y conceptualismo*

MAX FREUND CARVAJAL**

Resumen: En este artículo muestro cómo el conceptualismo, como enfoque filosófico, podría ofrecer una motivación para el desarrollo de teorías lógicas y matemáticas. Así, estas teorías encontrarían su justificación filosófica en el conceptualismo.

Palabras clave: intuicionismo, mundos posibles, sortales, universales

Abstract: *In this paper I show how conceptualism as a philosophical approach could offer the motivation for developing logical and mathematical theories. Thus, these theories would derive their philosophical justification from conceptualism.*

Key words: intuitionism, possible worlds, sortals, universals

El conceptualismo es un enfoque filosófico general que puede ser aplicado a diferentes áreas de la filosofía y cuyo principal objetivo es mostrar que las capacidades mentales (o entidades mentales) que son componentes del pensamiento, o que son esenciales al mismo, juegan un papel fundamental en la explicación filosófica de elementos importantes del área considerada. Así, el conceptualismo, como una posición filosófica general, puede ser implementado en la explicación de la naturaleza ontológica de ciertas entidades, tales como los números y los mundos posibles, de los fundamentos epistémicos de ciertos procesos, información, creencias, conocimiento, etcétera; o de los fundamen-

* Traducción del inglés de Max Fernández de Castro.

** Departamento de Filosofía-Universidad Nacional de Costa Rica, mfreund@una.ac.cr

Recepción: 29/09/10 Aceptación: 23/03/11

tos lógicos semánticos de expresiones lingüísticas, enunciados, aseveraciones, entre otros. De este modo se vuelve una alternativa filosóficamente importante al realismo y al nominalismo. En oposición al realismo, la explicación conceptualista debe hacer uso esencial de lo mental. En contraste con el nominalismo, las explicaciones conceptualistas deben recurrir a capacidades mentales distintas de la capacidad para el uso del lenguaje. Es un rasgo notable del enfoque nominalista su énfasis en el lenguaje para resolver problemas filosóficos, pero el conceptualismo va más allá del lenguaje al incluir a la mente como el principal recurso al desarrollar sus teorías.

Debido a que el conceptualismo puede jugar un papel importante en la resolución de problemas de filosofía de las matemáticas o de la lógica, ha sido empleado también como un fundamento para el desarrollo de teorías matemáticas y lógicas. Mi propósito en este artículo, es ilustrar algunos casos de esos desarrollos. Esto es, presentaré, en primer lugar, las soluciones conceptualistas de algunos problemas históricamente decisivos en la filosofía de la lógica o la matemática y, luego, mostraré como esas soluciones han motivado la construcción de teorías lógicas y matemáticas. Estos problemas incluirán el de los universales, la naturaleza ontológica de los números y el fundamento epistémico de enunciados y teorías matemáticas.

CONCEPTUALISMO Y MATEMÁTICAS

Dos tipos de problemas son centrales en las discusiones filosóficas de las matemáticas: uno es la cuestión relativa a la naturaleza ontológica de las entidades matemáticas (tales como números y conjuntos), y otro es la cuestión acerca de los fundamentos epistémicos de enunciados matemáticos (tales como aquellos de la teoría clásica de los números y la teoría de conjuntos). Diferentes soluciones a ese tipo de problemas podrían ser provistas por teorías con una inclinación realista, nominalista o conceptualista. El logicismo de Gottlob Frege y Bertrand Russell y el formalismo de David Hilbert son teorías filosóficas con frecuencia citadas, respectivamente, como un enfoque realista y uno nominalista al problema de los fundamentos de las matemáticas (véanse Hilbert, 1964; Godwin e Irvine, 2003; Grattan-Guines, 2003 y Russell, 1938). El intuicionismo de Luitzen Egbertus Jan Brouwer es un ejemplo de una teoría conceptualista contemporánea (para detalles de su programa filosófico véanse Brouwer, 1975 y Van Stigt, 1990).

El intuicionismo de Brouwer adapta y desarrolla una opinión expresada originalmente, por Immanuel Kant, quien sin duda debería ser considerado como uno de los más antiguos filósofos conceptualistas de las matemáticas. Kant pensó que nuestro conocimiento de los números descansa en el tiempo como una forma pura y una condición *a priori* de la percepción sensorial, así como sobre la conciencia de la capacidad de la mente para repetir el acto de contar una y otra vez. Los números existen en tanto que pueden ser alcanzados en el proceso de contar. Las leyes de los números son sintéticas *a priori* y al conocerlas la mente adquiere conocimiento sólo de su propio trabajo interno, no de la realidad en sí misma.

Brouwer sigue la idea de Kant y también afirma que el tiempo, independientemente de cualquier contenido perceptual (es decir, el tiempo como intuición pura), es el fundamento ontológico de las matemáticas. La matemática no es una teoría sino más bien es una actividad esencialmente ajena al lenguaje realizada por la mente humana y que tiene su origen en la percepción: la mente experimenta sensaciones y cuando una sensación da lugar a otra, un movimiento de tiempo toma lugar para la mente. Cuando ambas sensaciones son retenidas en la memoria individual en su orden propio, lo que obtenemos es una paridad. Si la paridad así nacida es abstraída de toda cualidad, queda la forma vacía del sustrato común de todas las paridades. Esta forma vacía es la intuición básica de las matemáticas y es usada como el principal ingrediente para procesos iterativos en los cuales son construidos los números. Las matemáticas consisten en procesos mentales que pueden ser construidos por una sucesión ilimitada de pasos repitiendo la división indefinidamente.

Además de entender las matemáticas como una actividad independiente, hay también una actitud negativa hacia el lenguaje matemático. La comunicación de ideas es una función del lenguaje matemático, pero esta herramienta de comunicación es, de acuerdo con Brouwer, imperfecta, ya que cualquier lenguaje es vago y está sujeto a confusión, incluyendo los lenguajes simbólicos. El pensamiento matemático, que es estricto y uniforme en sí mismo, se vuelve susceptible de obscuridad y de error cuando es transferido de una persona a otra por medio del habla o la escritura. Para las matemáticas no hay lenguaje que excluya malos entendidos y evite errores de memoria.

Puesto que los números son construidos por la mente —por introspección— la perspectiva filosófica intuicionista rechaza el infinito actual en favor de infinidades potenciales, o más bien, de sucesiones potencialmente infinitas. Las infinidades potenciales son las únicas dadas a los seres pensantes y perceptivos. En consonancia con estas opiniones, una aseveración de la existencia de un número con una cierta propiedad (es decir, una aseveración de la forma existe un numero *n* que tiene la propiedad *P*) debe ser justificada sólo por la construcción real de un número que posee la propiedad en cuestión o por la provisión de un método cuya aplicación construiría el número y mostrara que éste tiene esa propiedad. Una aseveración universal sobre un conjunto infinito de números (es decir, una aseveración de la forma todos los números *n* tienen la propiedad *P*) es entendida por el intuicionista como una aseveración hipotética al efecto de que, si cualquier número natural *n* nos fuera dado, podríamos estar seguros de que tiene la propiedad *P*. Evidentemente, esta interpretación es coherente con la opinión intuicionista del infinito: no requiere la opinión clásica de los números naturales como un infinito actual o completo. Por cierto, la inducción matemática es un ejemplo de un método aprobado por los estándares intuicionistas de Brouwer, siempre y cuando los razonamientos usados en su base y en el paso de inducción sean intuicionistas.

La interpretación anterior de los enunciados universales y existenciales relativos a números lleva a cuestionar el principio del tercero excluido en conexión con conjuntos infinitos de números. Esto es porque, para cierta propiedad *P*, podría no ser el caso que, o bien, hay un *n*, tal que *n* es *P* o que cada *n* no es *P*. Por un lado, podríamos no ser capaces de construir un número que tenga la propiedad *P* o de proveer un método para encontrar tal número; por otro lado, podríamos no ser capaces de mostrar constructivamente que todos los números son no *P*. En suma, sobre fundamentos intuicionistas se puede justificar un rechazo del principio del tercero excluido, al menos para el razonamiento matemático.

La ley del tercero excluido no es el único principio lógico no aceptado por Brouwer y otros intuicionistas. Por ejemplo, una dirección de la ley de doble negación y de las leyes de De Morgan no son principios válidos desde la perspectiva intuicionista. Esto es, en forma simbólica y donde $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ representan las nociones lógicas de negación, implicación (es decir, "si… entonces…"), conjunción ("…y…") y disyunción ("…o…"), los siguientes esquemas no están en la lista de leyes lógicas intuicionistas válidas: $\neg\neg B \rightarrow B$ (es decir, si no es el caso que no-B, entonces B) y $\neg(B \wedge C) \rightarrow (\neg B \vee \neg C)$ (es decir, si no es el caso que tanto B como C, entonces o no-B o no-C). Se han formulado sistemas formales de lógica que capturan los principios y reglas lógicas justificables sobre fundamentos intuicionistas.

Un sistema formal está constituido por un lenguaje formal, un conjunto de axiomas y de reglas. Los lenguajes formales se entienden, en general, como aquellos cuya caracterización no involucra necesariamente el uso de la noción de significado (aunque hay autores que han pensado que otro tipo de lenguajes pueden en principio ser entendidos de este modo). Un buen ejemplo de lenguaje formal es el de la lógica proposicional (o enunciativa) como es caracterizada en muchos libros introductorios de lógica matemática o simbólica. Los axiomas del sistema formal son sólo un subconjunto de todas las expresiones del lenguaje que son estipuladas como bien formadas, de acuerdo con las reglas que caracterizan al lenguaje formal. Las reglas del sistema formal son aquellas cuya aplicación transformará expresiones bien formadas del lenguaje en otras bien formadas del mismo lenguaje. Informalmente, esas reglas permiten derivar conclusiones correctas (respecto a cierto estándar de corrección). Un sistema formal de lógica es aquel cuyos axiomas y reglas son, respectivamente, principios y reglas de inferencia lógicamente válidos.

Unos de los primeros sistemas formales para la lógica del intuicionismo es la encontrada en Arand Heyting (1930). Otras formalizaciones aparecen, por ejemplo, en Michael Dummett (2000), Gerhard Gentzen (1969), Heyting (1956), Stephe Cole Kleene (1952), Kleene y Richard Eugene Vesley (1965), Helena Rasiowa y Roman Sikorski (1963) y Anne S. Troelsa (1969). Es importante señalar que, desde el punto de vista intuicionista, estos sistemas lógicos no agotan todos los modos de razonamientos válidos posibles. Esto es debido a la opinión intuicionista de que la dinámica del razonamiento matemático es tal, que no puede ser capturada, en principio, en un lenguaje de lógica simbólica con su carácter estático. La actividad matemática nunca es un dominio cerrado y nuevos modos de razonamiento lógicamente válidos, de acuerdo con la práctica intuicionista, son siempre posibles.

Los diferentes sistemas formales de lógica intuicionista deben ser vistos más bien como herramientas que proporcionan sugerencias de cómo debe proceder el razonamiento matemático intuicionista. Un ejemplo de estos sistemas es el de la lógica formal de enunciados o proposicional formulada en Kleene (1952):

Axiomas:

1. $B\rightarrow(C\rightarrow B)$
2. $(B\rightarrow C)\rightarrow(B\rightarrow(C\rightarrow D))\rightarrow(B\rightarrow D)$
3. $B\rightarrow(C\rightarrow(B\wedge C))$
4. $(B\wedge C)\rightarrow B$
5. $(B\wedge C)\rightarrow C$
6. $B\rightarrow(B\vee C)$
7. $C\rightarrow(B\vee C)$
8. $(B\rightarrow C)\rightarrow((D\rightarrow C)\rightarrow((B\vee D)\rightarrow C))$
9. $(B\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow\neg C)\rightarrow\neg B)$
10. $B\rightarrow(\neg B\rightarrow C)$

Reglas: Modus Ponens, de B y $B\rightarrow C$ infiérase C

Una de las primeras interpretaciones (semánticas) de los sistemas formales para la lógica intuicionista fue ofrecida por Heyting (1934), siguiendo la idea de explicar el significado de los conectivos lógicos en términos de pruebas constructivas. Por ejemplo, la verdad de $(A\rightarrow B)$ se hace equivalente a establecer una prueba constructiva que convierte cualquier prueba constructiva de A en una prueba constructiva de B. Se han ofrecido otro tipo de interpretaciones tales como las topológicas (Tarski, 1956; Rasiowa y Sikorski, 1963 y Goldblatt, 1984) y las semánticas (Beth, 1956; Kripke, 1965 y Van Dalen, 2002).

No todas las interpretaciones anteriores tienen buenas motivaciones intuicionistas, pero una que sí lo hace es la de Saul Kripke (1965). En esta interpretación se pide imaginar a un matemático idealizado, quien lleva a cabo una investigación matemática y cuya actividad procede en etapas. El conjunto de todas las etapas posibles relevantes está parcialmente ordenado por la relación *después*. En general, se puede continuar cada etapa de investigación en varias direcciones. El significado de los conectivos lógicos puede ser explicado en términos de la investigación y sus etapas. Se asume que el matemático en cada etapa establece hechos atómicos y de estos deduce enunciados más complicados a través de ciertas reglas.

El escenario intuitivo anterior puede ser formalmente expresado en un sistema semántico teórico-conjuntista. En el caso de la semántica para la lógica proposicional intuicionista, uno puede definir un modelo como un triple ordenado $<S, \leq, I>$, tal que el conjunto S está parcialmente ordenado por $\leq$ e I es una asignación de conjuntos de fórmulas atómicas a elementos de S tales que $I(i) \subseteq I(j)$ (es decir, I(i) es un subconjunto de I(j)), si $i \leq j$. I(k) representa el conjunto de fórmulas establecidas en el estado K. Donde "$\in$" representa membrecía en un conjunto, la asignación I es extendida a todas las fórmulas de la siguiente manera:

$B \vee C \in I(K)$ si y sólo si $B \in I(K)$ o $C \in I(K)$
$B \wedge C \in I(K)$ si y sólo si $B \in I(K)$ y $C \in I(K)$
$(B \rightarrow C) \in I(K)$ si y sólo si para toda $K \leq J$, $B \notin I(J)$ o $C \in I(J)$
$\neg B \in I(K)$ si y sólo si para toda $K \leq J$, $B \notin I(J)$

La noción de validez lógica, producto de la semántica anterior, puede ser agrupada por uno de los sistemas formales de Heyting, esto es, cada verdad lógica y cada argumento lógicamente válido respecto a la semántica anterior es respectivamente un teorema y un argumento derivable dentro de cierto sistema formal de Heyting.

Debe notarse que para otras interpretaciones (semánticas), filosóficamente motivadas desde un punto de vista intuicionista, ha sido probado que los principios y reglas que son lógicamente válidas, de acuerdo con la interpretación, son teoremas y reglas de cierto sistema formal de lógica intuicionista. Sin embargo, esas pruebas no cumplen los parámetros propios de los intuicionistas y no podrían ser aceptadas por ellos.

Los intuicionistas han sido capaces de desarrollar teorías matemáticas, incluyendo una teoría del continuo y una de conjuntos que emplean conceptos y hacen distinciones no contempladas en las matemáticas clásicas. Respecto a los conjuntos es importante apuntar que no son concebidos como colecciones ya hechas, sino más bien como leyes por medio de las cuales los elementos del conjunto pueden ser construidos paso a paso.

CONCEPTUALISMO Y UNIVERSALES

Uno de los problemas antiguos, más importantes en la historia de la filosofía, se relaciona con la predicación. El problema se enfoca en las bases semánticas de un juicio singular de la forma sujeto-predicado y exige una investigación respecto de la naturaleza ontológica de tal base. Éste puede ser expresado de la siguiente forma: ¿cuándo un juicio es un caso del esquema *b* es *P* (donde *b* es un término singular y *P* uno general) como el enunciado "La casa presidencial de Argentina es rosa", cuál es la naturaleza ontológica de la entidad que estamos predicando de *b*, en particular de la casa presidencial de Argentina? Si nuestra respuesta es que estamos predicando una propiedad, y (en el caso particular) la propiedad de ser rosa, ofrecemos una respuesta realista. En este sentido, se asume que las propiedades son entidades ontológicamente independientes (para formas contemporáneas de realismo, véanse Grossmann, 1983; Russell, 1938; Strawson, 1959; Donagan, 1963; Wolterstorff, 1973; Loux, 1978 y Armstrong, 1989). Por otro lado, si se asegura que sólo las expresiones predicativas (es decir, entidades lingüísticas) son predicadas, como en nuestro ejemplo el predicado "rosa" es la única entidad atribuida, se está dando al problema una solución nominalista. Como se apuntó, la perspectiva nominalista se enfoca principalmente en el lenguaje para resolver problemas filosóficos. Diferentes versiones del nominalismo son posibles dependiendo de las razones dadas para atribuir una expresión predicativa (véanse Carnap, 1969; Campbell,1990; Rodríguez-Pereira, 2002; Quine, 1954; Quinton, 1973; Sellars, 1963 y Williams, 1953). Finalmente, si la respuesta al problema es que la predicación debe ser encontrada en conceptos, nos hallamos en un marco conceptualista. La solución conceptualista, respecto a nuestro ejemplo, consistiría en sostener la equivalencia de la predicación con la aseveración de que el objeto que es la casa presidencial de Argentina cae bajo el concepto de ser rosa y, en general, que una aseveración de la forma *a* es *P* sólo expresa que *b* cae bajo un concepto, por ejemplo, el concepto que *P* representa.

Es importante notar que el problema de los universales ha sido enunciado en una forma más metafísica. Supongase que tenemos dos personas A y B. Claramente A y B son humanos. Pregunto ahora si la humanidad en A es o no la misma que en B. Una solución realista mantendría que tanto A como B son humanos porque ellos comparten la misma propiedad, la propiedad de ser humanos, y así ambas humanidades son la misma. La afirmación de que A y B son humanos es verdadera porque ambos comparten la propiedad de ser humanos. Pero también podemos decir que ambas humanidades son distintas, es decir, que la humanidad de A es su humanidad particular y la humanidad de B es su humanidad particular. Consecuentemente, A y B no comparten una entidad común en su composición metafísica. En este caso podemos mantener que la única cosa que ellos comparten cuando los llamamos humanos es el término *humano*. El primer enfoque metafísico es esencialmente realista y el último nominalista. El conceptualismo ofrece un terreno intermedio en el cual no hay un compromiso necesario con ninguno de los dos enfoques: A y B son humanos porque los dos caen en el concepto de ser humano, el concepto de humanidad. Para el conceptualismo, los términos generales representan conceptos y no propiedades o clases. Así, cuando se hace una aseveración singular de la forma sujeto-predicado, las bases semánticas de la aseveración son conceptos y, con esto, no estamos obligados a adoptar una teoría realista o nominalista para explicar las bases de la aseveración.

Una forma inicial de conceptualismo como una teoría de los universales puede remontarse, al menos, a Pedro Abelardo (1994). Este filósofo medieval rechazó rotundamente el realismo ontológico de los universales. Esto es, si G es un término general tal como *hombre*, G no representa una entidad real ontológicamente independiente, la cual pueda ser predicada de todas las G's. Así, si A y B son hombres no hay una cosa real individual y no lingüística que pueda ser predicado de ambos para que sean hombres. Sin embargo, también mantuvo que hay algo en lo que concuerdan y que constituye la base para llamar a ambos hombres. A esto lo denominó el estatus. En nuestro ejemplo, A y B concuerdan en ser un hombre y este es el estatus, pero éste no es ni una cosa real individual que ellos compartan ni una entidad que pueda ser predicada de ambos. El estatus no puede ser predicado en absoluto. Pero ningún concepto fidedigno del estatus puede ser formado tampoco, ya que nosotros, como humanos, no tenemos acceso epistémico a este a través de los sentidos. El estatus no es una cualidad sensible. Sin embargo, nosotros tratamos de construir un concepto de este objeto a partir de lo que recolectamos a través de nuestros sentidos; en nuestro ejemplo, construimos el concepto de hombre en general de las cualidades sensibles de los hombres. Los conceptos que hemos tratado de formar de los diferentes estatus son aquellos a los que los términos generales serán asociados y nos guiarán en la aplicación de esos términos.

La teoría de Abelardo muestra claramente rasgos de un enfoque conceptualista al tema de los universales. Rechaza el realismo, esto es, propiedades universales no son en esta teoría la base para la predicación ni son las entidades representadas por los términos generales. Por otro lado, aunque Abelardo adscribe universalidad sólo a términos generales, esto es, ellos son los únicos que pueden ser predicados de muchos (acordando en este punto con el nominalismo), los términos generales no son la única base para la predicación. Más bien, los conceptos (del estatus) asociados con ellos son, al fin y al cabo, la base para la predicación. (Para detalles y discusión de la teoría de Abelardo, véanse por ejemplo, Spade, 1985; Gracia, 1984 y Tweedale, 1976.)

En las teorías empiristas clásicas se encuentran ejemplos históricamente importantes del conceptualismo en relación con los términos generales. Por ejemplo, John Locke (1959) dice que los términos generales representan ideas (y no entidades reales) y estas últimas son obtenidas de objetos particulares por un proceso conceptual de eliminación de lo que es particular a ellos. La idea de una casa, por ejemplo, es formada dejando de lado las características que son peculiares a esta o a esa casa y manteniendo lo que es común a todas las casas. Esta idea es lo que el término *casa* representaría. Ahora bien, algunas de las cosas que Locke dice relativas al producto de ese proceso de abstracción dan la impresión de que hay una ambigüedad en su concepción de una idea general. A veces sugiere que una idea es un tipo de imagen mental general y abstracta; pero también parece entender una idea como lo que nosotros pensaríamos ahora es un concepto. Por cierto, es en el primer sentido que Locke ha sido el blanco de ataque de diferentes filósofos tales como George Berkeley (1999), ya que no puede ser completamente entendido lo que sería una imagen mental general abstracta. (Para discusiones recientes de la concepción de Locke de lo que es una idea abstracta véanse Chapell, 1994 y Guyer, 1994.)

Enfoques conceptualistas contemporáneos al problema de los universales son escasos. El más reciente intento de desarrollar el conceptualismo como una teoría de los universales es el de Nino Cocchiarella (2007).

El conceptualismo, como una teoría de universales, tiene sus críticos. Por ejemplo, David M. Armstrong (1978) planteó los siguientes problemas:

a) El conceptualismo debe explicar el escenario intuitivo en el cual aseveraríamos que hay cosas que son F aunque el concepto de ser un F no haya sido formado. Por ejemplo, podríamos concebir una situación en la cual existieran cosas blancas sin que el concepto de blancura hubiese sido formado.

b) El conceptualismo debe mostrar cómo evitar el siguiente posible regreso al infinito: de acuerdo con el conceptualismo a y b son cosas blancas si y sólo si ellas caen bajo el mismo concepto de ser blancas. Pero para que dos objetos a y b sean juzgados blancos, los conceptos bajo los cuales ellos caen para ser juzgados blancos deben ser instancias del mismo concepto de ser un concepto de blancura. Pero esto requiere que cada instancia del concepto de ser un concepto de blancura caiga bajo el mismo concepto de ser un concepto de ser un concepto de blancura y así sucesivamente. Razones similares pueden ser aplicadas al concepto de caer bajo. Este regreso al infinito es vicioso, porque la mismidad de diferentes objetos respecto a cierto rasgo, tal como la blancura, supuestamente es explicado de acuerdo con el conceptualismo por un recurso a conceptos. Sin embargo, esta explicación requiere explicación por el uso de más y más conceptos al infinito. De este modo, nunca alcanzamos una explicación metafísica completa de por qué los objetos son blancos.

c) Esto está conectado con el inciso a). Los conceptos, al ser entidades mentales, no podrían formar una clase lo suficientemente grande para explicar el número de conceptos necesarios para cubrir todas las clases naturales de objetos. De esta manera, el conceptualismo tendría que recurrir a conceptos posibles no reales, lo cual podría contradecir, no la letra, pero sí el espíritu del conceptualismo.

d) Hay un orden causal en la naturaleza que es independiente de nuestra mente y de nuestra conceptualización. Asimismo, las propiedades en la naturaleza dependen de este orden causal. Pero en contradicción con estas opiniones, el conceptualismo mantiene que la mismidad de objetos (tales como los provistos por las propiedades que determinan una clase natural) dependen de su relación con nuestras mentes.

Hasta ahora, ningún intento ha sido hecho para desarrollar soluciones a los problemas mencionados en favor del enfoque conceptualista.

CONCEPTUALISMO Y LÓGICA FORMAL

Como se mostró en la primera sección, una orientación conceptualista a un tópico filosófico podría tener implicaciones para la lógica formal, en el sentido de que el desarrollo de un cierto sistema lógico formal podría encontrar en aquél su justificación. En la misma sección, presentamos un ejemplo de cómo la teoría intuicionista de la ontología y epistemología de las matemáticas guía la construcción de ciertos sistemas lógicos. Ahora, ofreceré ejemplos de sistemas lógicos desarrollados como una reacción a soluciones de problemas en filosofía de la lógica. Esos ejemplos son los de las lógicas de segundo orden conceptualistas y las lógicas sortales conceptualistas. Éstas son resultados de una solución conceptualista al problema de los universales.

En general, una solución al problema de los universales implica un compromiso a cierta lógica de la predicación, basada en la naturaleza de los universales, la cual se ofrece como respuesta a ese problema. Esto es porque una cierta concepción de los universales determinará la naturaleza de la predicación y esto, al mismo tiempo, determinará las condiciones lógicas de la predicación. Por ejemplo, una solución conceptualista al problema de los universales explicará la predicación como la subsunción bajo un concepto y la lógica de la predicación constituirá, de este modo, la teoría de las condiciones lógicas de lo que es caer bajo un concepto.

La lógica correspondiente a una opinión de los universales puede ser capturada por (o expresada en) una teoría lógico formal de la predicación, esto es, un sistema formal (junto con una semántica) para una lógica de la predicación. Como he indicado en la segunda sección, un sistema formal está constituido por un lenguaje formal y un conjunto de axiomas y reglas. Asimismo he indicado que los lenguajes formales generalmente se entienden como aquellos cuya caracterización no requiere necesariamente el uso de la noción de significado y observé que el conjunto de axiomas del sistema formal es sólo un subconjunto de todas las expresiones del lenguaje, las cuales fueron estipuladas como bien-formadas de acuerdo con las reglas que caracterizan al sistema formal: las reglas del sistema formal son aquellas cuya aplicación transformará expresiones bien-formadas del lenguaje en otras expresiones bien-formadas del mismo lenguaje.

La semántica para un lenguaje formal es provista de un modo o bien formal o intuitivo (informal). Una semántica informal o intuitiva, generalmente, asigna significado a la expresión del lenguaje formal por medio de una teoría informal no-matemática o por una asociación de algún tipo con expresiones del lenguaje ordinario. En el último caso, por medio de cierto procedimiento, las expresiones del lenguaje formal son correlacionadas con expresiones del lenguaje natural de un modo tal que la correlación, por su naturaleza, proporcione una interpretación del lenguaje formal. Una semántica formal, por otro lado, hace uso de una cierta teoría matemática, tal como la teoría de conjuntos, para proveer significados. En el caso de los lenguajes de la lógica proposicional o enunciativa (un ejemplo de lenguaje formal que ofrecí en la primera sección), la semántica intuitiva para este lenguaje de la lógica enunciativa es proporcionada mediante la asignación de enunciados declarativos de un lenguaje natural (tal como el español) a las variables proposicionales y por la correlación de operadores proposicionales a ciertas expresiones del lenguaje natural. Una semántica formal es dada a través de la asignación de ciertas funciones veritativo-funcionales a los operadores y ciertos valores (verdadero-falso, por ejemplo) a las variables proposicionales.

Cuando un sistema formal es asociado con una semántica, es decir, con un sistema que dota de significado al lenguaje formal (o sistema formal), lo que obtenemos es una teoría formal. Una teoría formal de la predicación para una teoría (filosófica) de los universales es sólo una teoría formal en la cual se ofrece una explicación de la naturaleza lógica de la predicación para la teoría filosófica. Esto es, una explicación en términos de una teoría formal de las condiciones lógicas bajo las cuales la atribución de un universal es correcta. Así, una teoría lógica formal de la predicación, para el conceptualismo, expresa en términos de axiomas y reglas las condiciones lógicas de la predicación de un concepto; para el realismo, las condiciones lógicas de predicación de una propiedad o relación; y finalmente, para el nominalismo las condiciones lógicas de la predicación de una expresión predicativa. Por cierto, la teoría de los universales con los que está asociada la teoría lógico formal de la predicación provee la semántica intuitiva o informal para esta teoría formal, ya que la teoría de los universales determina la naturaleza de las entidades representadas por los predicados y explica también la naturaleza de la predicación. La semántica informal puede también ser formalmente expresada en una semántica teórico-conjuntista para el lenguaje. En este caso, la semántica formal captura los principales elementos de la teoría de los universales de modo riguroso. Entre los elementos recolectados, deberían estar las intuiciones de verdad lógica y consecuencia lógica de acuerdo con los elementos de la teoría de los universales en cuestión. La semántica teórico-conjuntista que expresa estas intuiciones se vuelve, asimismo, una herramienta para mostrar que la teoría formal de la predicación incluye (o nunca incluirá en principio) todas y sólo todas las verdades y reglas lógicas de los universales correspondientes a esta teoría.

Lógica de segundo orden

Diferentes teorías lógico formales de la predicación han sido desarrolladas para las tres principales teorías de los universales. Ya que el tema aquí es el conceptualismo, me enfocaré sólo en aquellas teorías asociadas con este enfoque filosófico (para detalles de teorías formales realistas o nominalistas de la predicación, véanse Cocchiarella, 1986 y 1989). Las teorías lógico formales conceptualistas que han sido construidas son teorías lógicas cuyos medios de expresión no sólo permiten referirnos a todos o algunos de los individuos, sino también a todos o a algunos de los conceptos (bajo los cuales los individuos podrían caer). Debido a este rasgo, esas teorías son consideradas como lógicas de segundo orden (ya que los individuos son la referencia del primer orden). Debo señalar que las lógicas realistas o nominalistas de segundo orden también han sido desarrolladas y en estos casos sus medios de expresión permiten referirnos a todas o algunas de las expresiones predicativas (en el caso del nominalismo) y a todas o algunas de las propiedades y relaciones (en el caso del realismo). Este rasgo de capacidad expresiva de segundo orden de la expresión, de una teoría lógico-formal de la predicación de segundo orden, sea realista, nominalista o conceptualista, hace posible formular, en la teoría formal misma, las condiciones lógicas de existencia de universales de la teoría de los universales asociada con la teoría formal.

Las principales teorías formales conceptualistas de la predicación pueden ser encontradas en Cocchiarella (1980, 1986 y 1989). Estos trabajos contienen sistemas tanto intensionales como extensionales, pero aquí sólo presentaré los últimos, esto es, las teorías formales conceptualistas de la predicación que no contienen operadores intensionales tales como los de necesidad o posibilidad. El lector interesado en teorías formales conceptualistas de segundo orden intensionales de la predicación puede consultar los trabajos antes mencionados.

Las diferentes teorías formales conceptualistas de segundo orden de la predicación corresponden a ciertas variantes del conceptualismo, en el sentido en que la adhesión a cualquiera de esas variantes justifica la adopción de una de esas teorías formales, como una lógica viable para la predicación de un concepto, esto es, como una teoría formal que incluya las verdades y esquemas de inferencias lógicamente válidas que involucran la predicación o atribución de un concepto. Estas variantes proveen las bases de la semántica informal para estas teorías formales y bajo esta semántica las teorías formales sistematizan los principios lógicos y reglas de predicación de un concepto de acuerdo con la variante asumida de conceptualismo.

Ahora bien, un rasgo común a todas las versiones mencionadas de conceptualismo es la idea de que los conceptos son capacidades cognitivas o estructuras cognitivas basadas sobre tales capacidades, así como una concepción general de cómo estos conceptos pueden ser construidos. De acuerdo con esta concepción, la formación de conceptos supuestamente procede a través de fases de desarrollo de complejidad creciente. Cada una de esas fases implica la reorganización de conceptos de acuerdo con ciertas leyes de su formación que son características de la fase en cuestión. Dos perspectivas principales de formación de conceptos han sido contempladas y las construcciones lógicas seguidas en esas construcciones pueden ser expresadas en la forma de *esquemas de comprensión*. Indicaré los rasgos generales de esos esquemas y luego presentaré los esquemas asociados con cada una de estas perspectivas. Pero antes necesito referirme a los lenguajes formales de las teorías lógicas formales conceptualistas de la predicación, ya que la formulación de estos esquemas presupone un lenguaje formal.

Todos los lenguajes formales de las teorías formales de segundo orden conceptualistas incluyen, en su sintaxis lógica, símbolos que deben estar (semánticamente) ligados con las nociones lógicas de negación (por ejemplo, "no es el caso que ..."), implicación (es decir, "si ... entonces ..."), identidad ("... es el mismo que ..."), paréntesis izquierdo, paréntesis derecho, cuantificación universal ("cada"), el cuantificador existencial ("algún") y la equivalencia material ("... si y sólo si ..."). Los lenguajes en cuestión también incluyen símbolos que representan expresiones predicativas, variables de expresiones predicativas e individuales (es decir, variables cuyo rango de aplicación son individuos). Usaremos P, G, F con o sin subíndices numéricos para referirnos a variables predicativas y x con o sin subíndices numéricos para referirnos a variables individuales. Algunos símbolos correspondientes a algunas nociones son asumidos como básicos y otros son definidos en términos de los primeros. Para el objetivo actual, se asumirá el lenguaje formal cuyos símbolos lógicos son: $\sim$, $\rightarrow$, $=$,), (, $\forall$, $\exists$, y $\leftrightarrow$ e interpretémoslos mediante las nociones lógicas antes mencionadas, en el mismo orden respectivamente.

El conjunto de expresiones significativas (o bien formadas) del lenguaje formal presente incluirá expresiones de la forma de una identidad "($a=b$)" (a es idéntico a b) o de una atribución $Pt_1 \ldots t_n$ donde P es una expresión predicativa y $t_1 \ldots t_n$ son constantes o variables individuales. Las atribuciones deben ser interpretadas como "$t_1 \ldots t_n$ están en la relación P" (si $n>1$) o como "t es P" (si $n=1$). Habrá también expresiones de la forma $\forall$xB y $\forall$PB, donde B es una expresión significativa, x una variable individual y P una variable predicativa. Estas últimas formas deberían ser leídas, informalmente, como "cada individuo x es tal que B" y "cada concepto P es tal que B", respectivamente. Expresiones que comienzan con el símbolo de cuantificación existencial tales como $\exists$xB y $\exists$PB deben ser interpretadas, respectivamente, como "algún individuo x es tal que B" y "algún concepto P es tal que B".

De acuerdo con el lenguaje formal anterior, se pueden ahora caracterizar las expresiones a que he referido antes como *esquemas de comprensión*, los cuales establecen las condiciones lógicas para la formación de conceptos. Pero, primeramente, debe dejarse claro que esquemas de comprensión pueden también ser formulados para las otras teorías de los universales. En general, un esquema de comprensión (en el lenguaje formal dado) será una expresión de la forma:

$$(\exists F)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[F(x_1, \ldots x_n)\leftrightarrow B]$$

el cual podría o no ser precedido por cuantificadores adicionales, y donde el cuantificador existencial ($\exists$F) supuestamente se refiere a una entidad de la teoría asumida de la predicación y B representa ciertas expresiones bien formadas del lenguaje formal. En el caso del conceptualismo, el cuantificador existencial de segundo orden ($\exists$F) en cualquier esquema de comprensión deberá entenderse de tal forma que su referencia sea a conceptos y leerse, de manera informal, como "hay un concepto F tal que para todos los objetos $x_1, \ldots x_n, x_1, \ldots x_n$ caen bajo F si y sólo si $x_1, \ldots x_n$ caen bajo una expresión B". Así, la expresión anterior equivaldrá a la aseveración de que hay un concepto correspondiente a cada expresión bien formada que B represente. En el caso del nominalismo y del realismo, el cuantificador existencial ($\exists$F) se referirá a aquellas entidades (distintas de los conceptos) que representan, supuestamente las expresiones de predicado, expresiones de acuerdo con la teoría de los universales adoptada, y B representará cualquiera de estas entidades. Para el realismo, el cuantificador existencial representará propiedades y relaciones y el esquema entero de comprensión establecerá, entre otras cosas, las condiciones lógicas de existencia de propiedades y relaciones complejas.

Ahora bien, como ya mencioné, hay dos principales variantes de conceptualismo presupuestas por las teorías lógicas conceptualistas de segundo orden, a saber, el conceptualismo constructivo y el holístico. El primero es una teoría filosófica que sólo permite una formación de conceptos que cumpla con las condiciones del así llamado "principio del círculo vicioso de Russell" aplicado a conceptos; en otras palabras, el conceptualismo constructivo acepta como legítimos sólo conceptos cuyo contenido no implica referencia a conceptos a los cuales ellos mismos pertenecen. Las condiciones lógicas de conceptos formados de acuerdo con esta versión del conceptualismo se expresan en el siguiente principio de comprensión:

$$\text{(CCP)}\quad (\forall G_1)\ldots(\forall Gk_n)(\exists F)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[F(x_1,\ldots x_n)\leftrightarrow B]$$

en el que (1) B es una fórmula significativa en la cual ninguna constante no-lógica aparece, (2) ni F ni el signo de identidad aparecen en B, (3) ninguna variable predicativa tiene una figuración acotada en B, (4) todas la variables de predicado que figuran (libres) en B están entre las variables G_1 hasta G_k y x_1 ... x_n están entre las variables individuales distintas que figuran en B (aunque ellas no necesariamente son todas la variables individuales que figuran libres en B).

De acuerdo con el principio anterior y desde la interpretación conceptualista del lenguaje formal, podemos formar conceptos de otros conceptos por medio de las operaciones lógicas de la lógica de primer orden (por ejemplo, implicación, negación, conjunción, disyunción y cuantificación sobre individuos). Por ejemplo, para cualesquiera dos conceptos G y F debería haber un concepto formado al aplicar la operación lógica de conjunción para ambos y cuyo contenido sería el de un concepto de un individuo que es G y F. Evidentemente, la cláusula tres del principio corresponde a una de las características definitorias del conceptualismo constructivo que impide la formación de conceptos que no satisfacen las condiciones del principio del circulo viciosos de R. Pero el principio permite referencia cuantificacional a todos los individuos en la construcción de conceptos. El uso de esta operación lógica es legítima en la visión que tiene el conceptualismo constructivo de la formación de conceptos. Finalmente, la justificación de una parte de la cláusula dos se encuentra en la tesis de que la identidad no podría representar un concepto que sea compatible con los principios del conceptualismo constructivo.

Es necesario notar que dentro del conceptualismo constructivo se encuentra una versión ramificada, la cual postula un proceso de formación de conceptos con una cantidad infinita, pero numerable de etapas. En este proceso, los conceptos formados en cada etapa se volverían los contenidos de los construidos en la siguiente, de tal manera que esos conceptos posteriores presupondrán referencia a la totalidad de los formados en los estados anteriores. Así, los estados son intermedios en tanto que hay siempre una etapa siguiente en la cual nuevos conceptos pueden ser formados que tienen como contenido los conceptos formados en la etapa previa.[1]

---

[1] El tipo anterior de conceptualismo ramificado puede ser representado formalmente si introducimos en la sintaxis lógica símbolos de cuantificador para cada nivel y cuyos dominios de cuantificación sean los conceptos formados en ese nivel. Así, podemos introducir como símbolos lógicos primitivos los símbolos de cuantificador universal $\forall^1 \ldots \forall^n \ldots$ ($n \in N$-{0}, es decir, n es un número natural positivo) que sólo pueden ser prefijados a variables de predicados. Se debe entender que un cuantificador de predicado ($\forall^n F$) se refiere a conceptos formados en el nivel n. El siguiente principio de comprensión incorpora los principios de formación de conceptos válidos en el conceptualismo ramificado:

(RCCP) $(\forall^n G_1) \ldots (\forall^n G_k)(\exists^n F)(\forall x_1) \ldots (\forall x_m)[F(x_1 \ldots x_m) \leftrightarrow B]$

donde (1) B es una expresión bien formada en la cual no figuran constantes no-lógicas, (2) ni F ni el signo de identidad figuran en B, (3) ninguna variable de predicado está acotada en B por un cuantificador de un nivel mayor o igual que n, y (4) $G_1 \ldots G_k$ son todas las variables de predicado que figuran libres en B y $x_1 \ldots x_n$ son algunas de (no necesariamente todas) las variables individuales que figuran libres en B. De acuerdo con este esquema, las expresio-

Ahora bien, los mecanismos cognitivos que llevan al proceso de etapas infinitas en el conceptualismo ramificado pueden también llevar a una variante de conceptualismo donde hay lugar para conceptos impredicativos, estos es, aquellos cuyo contenido podría presuponer como dada una totalidad de conceptos a los cuales ellos pertenecen. En esta versión el conceptualismo es holístico y postula una transición idealizada a un límite en el desarrollo de la formación de conceptos, los cuales pueden no tener ninguna etapa posterior, en la cual la formación de conceptos impredicativa esté finalmente lograda. Así, el conceptualismo holístico justificaría el siguiente principio de comprensión:

$$\text{(CP)} \quad (\exists F)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[F(x_1, \ldots x_n)\leftrightarrow B]$$

en la cual B es cualquier fórmula significativa en la que F no tiene ninguna figuración libre y en la cual $x_1, \ldots x_n$ son variables individuales distintas que figuran libres en B (donde no necesariamente son las únicas variables individuales que figuran en B). De acuerdo con nuestra semántica (conceptualista) informal, este principio establece que cualquier expresión bien formada de un lenguaje representa un concepto. En otras palabras, cualquier expresión significativa de lenguaje formal determina una posible condición lógica de formación de conceptos.

Dados los dos esquemas anteriores, las teorías lógicas formales de la predicación correspondientes a las diferentes versiones del conceptualismo, que están determinadas por la construcción de conceptos holísticos o constructivos, pueden ser obtenidas si sólo les agregamos los siguientes axiomas y reglas:

Axiomas

1. $\exists y(y=x)$
2. $B\rightarrow\forall yB$, si yo no aparece libre en B
3. $\forall x(B\rightarrow C)\rightarrow(\forall xB\rightarrow\forall xC)$

---

nes bien formadas del lenguaje que cumplen las condiciones 1-3 representan conceptos construidos en el proceso de formación de conceptos de infinitos niveles.

4. LL $(x=y)\rightarrow(B\leftrightarrow B^*)$, donde B* se obtiene de B al remplazar una o más figuraciones libres de x por figuraciones libres de y.

Reglas

(UG) De B infiérase $\forall$uB, donde u es o una variable individual o predicativa.
(MP) De B y $(B\rightarrow C)$ infiérase C.

En otras palabras, se obtiene una teoría lógico formal de la predicación para el conceptualismo constructivo y otra para el conceptualismo holístico si se añade lo anterior a los esquemas de comprensión CCP y CP, respectivamente. La regla UG de cualquiera de esos sistemas es sólo la regla de generalización universal para conceptos e individuos. Esto es, UG permite inferir que cada concepto es tal que B (o cada individuo es B), si ya probamos que B. MP es claramente la regla del *Modus Ponens*, esto es, si P implica C y tenemos P entonces inferimos C. El axioma LL es sólo la ley de Leibniz, esto es, si dos individuos son idénticos, entonces lo que es verdadero de uno de ellos es verdadero del otro.[2]

Como dije antes, una semántica para una teoría lógico formal de la predicación puede ser construida haciendo uso de la teoría de conjuntos

---

[2] Si se añade a los axiomas y reglas el esquema de comprensión caracterizado en la nota anterior, se obtiene una teoría lógica formal de la predicación para el conceptualismo ramificado. En el caso del conceptualismo constructivo, por ejemplo, la semántica teórico-conjuntista que ha sido desarrollada involucra los siguientes elementos:

(a) Un conjunto D de objetos sobre los cuales correrán los cuantificadores individuales y del que se supone es el dominio de discurso del lenguaje. El conjunto podría ser vacío, es decir, carecer de objetos.
(b) Una cierta asignación f de “significados teórico-conjuntistas” al conjunto de predicados constantes de L. Cada uno de esos significados es un conjunto de n-tuples de miembros de D.
(c) Para todo $n\in N$-{0}, un conjunto X_n que representa las extensiones de un conjunto numerable de conceptos n-ádicos que se pueden construir considerando ese dominio. Desde el punto de vista teórico-conjuntista, X_n es un conjunto numerable, cada miembro del cual es un conjunto de n-tuples extraídas de D.

de tal modo que la semántica formal pueda ser vista como capturando muchos elementos importantes de la teoría de los universales, a la cual la teoría formal de la predicación supuestamente corresponde, en particular, las nociones de verdad y consecuencia lógica relativas a la teoría de los universales en cuestión. Se han desarrollado sistemas semánticos teórico-conjuntistas para las dos teorías lógico formales conceptualistas de la predicación a las que he referido antes y han sido usadas para probar que todos los principios y reglas lógicamente válidas, de acuerdo con la variante en cuestión del conceptualismo, pueden ser derivados de la correspondiente teoría lógico formal de la predicación y que todos los principios y reglas que pueden ser probados en esta teoría formal son

---

Además de lo anterior, la semántica teórico-conjuntista requiere una asignación A de valores a las variables. A asignará a cada variable individual x un objeto de D y a cada variable predicativa n-ádica K, un conjunto de n-tuples de D.

Recolectemos los elementos 1-3 anteriores en una entidad llamada una estructura semántica para un lenguaje de segundo orden extensional. (Esta es una entidad teórico-conjuntista de la forma $<<D,f>, <Xn> n\in N\text{-}\{0\}>$.) Sea $S=<<D,f>, <Xn> n\in N\text{-}\{0\}>$ una estructura teórico-conjuntista para el conceptualismo constructivo, A una asignación en S y A(*d/a*) una asignación a las variables que es como A excepto por asignar *d* a *a* (*a* es una variable predicativa o individual). El valor de verdad de B en S dada A en símbolos, Val (B, S, A), puede ser definido (recursivamente) como sigue:

1. Val $(x=y, S, A)=1$ si y sólo si $A(x)=A(y)$.
2. Val $(Px_1 \ldots x_n, A)=1$ si y sólo si $<A(x_1)\ldots A(x_n)>\in A(P)$.
3. Val $(\sim B,A)=1$ si y sólo si Val $(B, A)=0$.
4. Val $(B\rightarrow C)=1$ si y sólo si o Val $(\sim B,A)=1$ o Val $(C, A)=0$.
5. Val $(\forall H^n B, A)=1$ si y sólo si para cada $d\in Xn$, Val$(B, A(d/H))=1$.
6. Val $(\forall xB, A)=1$ si y sólo si para cada $d\in D$, Val$(B, A(d/x))=1$.

Aquí 1 representa la verdad y 0 la falsedad.

Finalmente diremos que una fórmula significativa B válida si y sólo si Val $(B, S, A)=1$ para cualquier estructura semántica S para el conceptualismo constructivo y cualquier asignación A en S, y que un conjunto K de fórmulas es satisfactible si y sólo si hay una estructura semántica S para el conceptualismo constructivo y una asignación A en S tal que Val $(B, S, A)=1$ para cada $B\in K$.

lógicamente válidos respecto al conceptualismo. En otras palabras, por medio de la semántica teórico-conjuntista se puede mostrar que cierta teoría formal de la predicación realmente captura las nociones de la verdad y consecuencia lógicas tales como éstas son determinadas por la variante del conceptualismo en cuestión. (Para detalles de sistemas semánticos teórico-conjuntistas para diferentes variantes del conceptualismo así como para el realismo y el nominalismo, véase Cocchiarella, 1986.)[3]

De acuerdo con el conceptualismo como teoría de los universales, la predicación debe ser encontrada en conceptos y así, para un conceptualista, una lógica de la predicación debería ser de la predicación de conceptos, esto es, una teoría lógica que establece las condiciones lógicas de subsunción bajo un concepto y, sí los modos de expresión de segundo orden son posibles en la lógica, las condiciones lógicas de formación de conceptos. He caracterizado antes dos teorías lógico formales que son candidatas para una lógica de la predicación en este último sentido. Éstas corresponden a dos diferentes variantes del conceptualismo que determinan la adopción de ciertos principios y reglas del lenguaje formal de la teoría como principios y reglas para una lógica de la predicación de conceptos. En otras palabras, la interpretación informal de este lenguaje por medio del conceptualismo como teoría de los universales (la cual es tal que, por ejemplo, los cuantificadores de segundo orden se referirán a conceptos y las expresiones predicativas representarán conceptos) hacen de esos principios y reglas, principios generales y reglas para una lógica de (una variante de) conceptualismo. De este modo, la teoría lógico formal en la cual estos principios y reglas son recolectados de una manera sistemática junto con la interpretación informal dada por el conceptualismo, como teoría de los universales, constituirá una lógica de la predicación de un concepto (de acuerdo con una variante del conceptualismo). Por otro lado, la semántica formal (teórico-conjuntista) es sólo un instrumento para mostrar que esta lógica realmente captura todos los principios y reglas lógicas de la variante del conceptualismo.

---

3 Si se agrega el esquema de comprensión caracterizado en la nota 2 a los axiomas y reglas, se obtiene una teoría lógica formal de la predicación para el conceptualismo ramificado.

Quiero concluir esta sección haciendo referencia a un punto importante relativo a las teorías lógico formales de la predicación. De acuerdo con lo anterior, una variante del conceptualismo justificaría la adopción de cierta teoría formal de la predicación como su lógica. Sin embargo, la adopción de un sistema formal correspondiente a una de estas variantes no necesariamente implica la adopción del conceptualismo. Este es el caso, por ejemplo, del sistema formal correspondiente al conceptualismo holístico: el principio CP, así como los otros axiomas y reglas, puede también ser justificado sobre la base de una teoría realista de los universales (véase Cocchiarella, 1986).[4] Sin embargo, puede encontrarse una diferencia en la semántica formal, ya que, se puede mostrar que, bajo sus semánticas teórico-conjuntistas, ningún sistema formal de predicación puede capturar todas las verdades lógicas y reglas de inferencia del realismo como una teoría de los universales. No ocurre lo mismo con el conceptualismo holístico.

Lógica de sortales

Varios autores han observado que hay ciertos términos (a los cuales han llamado *sortales*) que poseen ciertas propiedades lógicas que no son fielmente representadas en el marco de la lógica clásica. No hay acuerdo general entre esos autores sobre lo que debería contar como un criterio definido para que una expresión sea sortal.[5] Pero es claro que la mayoría de los nombres comunes habrían de ser incluidos en la clase de los términos sortales y que la mayoría de los adjetivos y de los verbos intransitivos deberían ser excluidos de esta clase. Relacionado con la noción de un término sortal, hay otras nociones (lógicas) importantes tales como identidad sortal (por ejemplo, "x es el mismo hombre que y"), predicación sortal (por ejemplo, "es un hombre") y cuantificación sortal (por ejem-

[4] En otras áreas de la filosofía y de la lógica se han mostrado limitaciones expresivas de los sistemas formales (véanse, por ejemplo, los problemas filosóficos que giran en torno a los teoremas de Löwenheim-Skolem).

[5] Por ejemplo, dos criterios importantes mencionados por muchos autores son los del conteo y la identidad, es decir, si S es un término sortal, debe ser posible preguntar cuántos S's hay y si *a* es el mismo S que *b*.

plo, "cada hombre" y "algún hombre"). Estas nociones lógicas deben ser distinguidas de la predicación estándar (por ejemplo, "es rojo"), de la identidad absoluta ("x es idéntico a y") y, finalmente, de la cuantificación absoluta (clásica) (es decir, "cada individuo" y "algún individuo").

La cuestión de lo que representa un término sortal está ligada con una solución al problema de los universales. Esto es, se podrían tener teorías conceptualistas, realistas o nominalistas de lo que representa un término sortal. En otras palabras, un sortal puede ser visto como lo que representa un concepto, una propiedad, un conjunto (en el caso del nominalismo teórico-conjuntista) o nada (en el caso del nominalismo estándar). Por ejemplo, uno podría ver al término sortal *caballo* como lo que representa a un concepto (al concepto de caballo), a una propiedad (la de equinidad) o a un conjunto (el de los individuos de los que es verdadero el término *caballo*). Como consecuencia de la posible interpretación filosófica de términos sortales se puede, en principio, desarrollar teorías lógico formales de la predicación sortal para términos sortales y conceptos lógicos relacionados (tales como la cuantificación, la predicación y la identidad sortales) con una orientación realista, conceptualista o nominalista.

En general, una teoría lógico formal conceptualista para sortales expresará, en términos de axiomas y reglas, las condiciones lógicas de predicación de un concepto, de la identidad bajo un concepto y de la cuantificación basadas en conceptos sortales; una teoría realista, las condiciones lógicas de la predicación de una propiedad , de la identidad y de la cuantificación basadas en una propiedad sortal; y, finalmente, una teoría nominalista, las condiciones lógicas de predicación de un predicado, de la identidad y de la cuantificación basadas en un predicado sortal (pueden encontrarse teorías lógico formales conceptualistas para sortales en Freund, 2000, 2001, 2004 y 2007; y Stevenson, 1972. Para una teoría realista véase Gupta, 1980).

Las teorías lógicas conceptualistas, desarrolladas en los trabajos de Freund, asumieron las teorías filosóficas conceptualistas brevemente caracterizadas en la sección previa y el trabajo de Leslie Stevenson está basado en la posición filosófica de David Wiggins (2001). En estos trabajos, se han desarrollado semánticas (teórico-conjuntista) formales que capturan los diferentes aspectos de la semántica intuitiva basada en el conceptualismo como teoría de los universales, en particular las nociones de verdad y consecuencia lógica. Relativo a la semántica formal, se ha mostrado que cada verdad y regla de la lógica conceptualista de sortales y nociones lógicas relacionadas pueden ser derivadas de las teorías formales para sortales y viceversa.

A modo de ilustración, presentaré la semántica formal y la sintaxis lógica que desarrollé en Freund, 2000. La semántica es para un lenguaje L extensional que incluye como su conjunto de símbolos lógico primitivos $\sim$, $\rightarrow$, $=$,),(y $\forall$. Los operadores proposicionales lógicos de conjunción, disyunción y equivalencia material son representados por los símbolos $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$ respectivamente y definidos en el modo usual. L también asume una cantidad numerable de variables individuales, de variables de término sortal y, para cada entero positivo n, variables predicativas n-ádicas. Las fórmulas atómicas bien formadas de L son expresiones, o bien de la forma de una identidad relativa ($a =_S b$), donde a y b son variables individuales y S es una variable de término sortal, o de la forma $Px_1 \ldots x_n$ donde P es una variable predicativa n-ádica y $x_1 \ldots x_n$ son variables individuales. La fórmula atómica $a =_S b$ debería ser leída como "a es la misma S que b".

El conjunto de expresiones bien formadas de L es el menor conjunto que contiene las fórmulas atómicas y tales que $\sim$B, (B$\rightarrow$C), $\forall$xB y $\forall$SB están en el conjunto siempre que B y C también lo estén (x y S son, respectivamente, una variable individual y una variable de término sortal).

Un marco sortal (o marco-S) para L es una estructura $<D, S>$ tal que (1) D es un dominio de discurso, vacío o no, y (2) $S \subseteq P(D)$ (donde "P(D)" representa el conjunto potencia de D). El conjunto S de un marco-S representa, de manera teórico-conjuntista, el conjunto de conceptos sortales que han sido (y podrían en principio) ser construidos respecto al dominio D (en un cierto proceso de desarrollo conceptual).

Una asignación (de valores a las variables) en un marco-S $<D, S>$ es una función A con el conjunto de variables (de todos los tipos) como dominio y tal que (1) $A(x) \in D$, para cada variable individual x, (2) $A(H) \in S$, para cada variable de término sortal H, y (3) para cada entero positivo n y cada variable predicativa n-ádica π, $A(\pi) \in P(D^n)$. Así, en una asignación dada, las variables de término sortal representarían (representaciones teórico-conjuntistas de) conceptos sortales.

Un modelo sortal es una par ordenado M=<<D, S>, A>, donde A es una asignación en el marco-S <D, S>. Por M(d/a) entenderemos el par ordenado <<D, S>, A(d/a)>, donde A(d/a) es como A, excepto por asignar *d* a *a* (*a* es o una variable de individuo o una variable de término sortal).

Sean x, y, y z variables individuales, R y S variables de términos sortales, B y C expresiones bien formadas de L, asimismo, sea S un modelo-S <<D, S>, A>. El valor de verdad de B en M (en símbolos, Val (B, M)) puede ser definido recursivamente como sigue:

1. Val ($x=_R y$, M)=1 si y sólo si A(x)=A(y) y A(y)$\in$ A(R)
2. Val ($Px_1 \dots x_n$, M)=1 si y sólo si <A(x_1), … A(x_n)>$\in$ A(P)
3. Val (~B, M)=1 si y sólo si Val (~B, M)=0
4. Val (B→C, M)=1 si y sólo si Val (~B, M)=1 y Val (C, M)=1
5. Val (∀HB, M)=1 si y sólo si para cada d$\in$S, Val (B, M(d/H))=1
6. Val (∀xHB, M)=1 si y sólo si para cada d$\in$A(H), Val (B, M(d/x))=1

Relativa a una asignación de valores a las variables, la cláusula 6 expresa cuantificación universal sobre todos los objetos que caen bajo el concepto sortal representado por una variable de término sortal. La cláusula 5 anterior captura de una manera teórico-conjuntista el concepto de cuantificación de segundo orden sobre conceptos sortales. La cláusula 2 representa de manera teórico-conjuntista la predicación respecto a conceptos predicables. Obviamente, la cláusula 1 expresa de manera teórico-conjuntista la noción de identidad sortal. Esto corresponde a la visión conceptualista de sortales como capacidades cognitivas para identificar y clasificar individuos.

De acuerdo con la visión filosófica conceptualista anterior, de que la cuantificación y la identidad absolutas son construidas en una cierta etapa de la formación de conceptos en términos de cuantificación sortal de segundo orden, de identidad sortal y de cuantificación sortal, el lenguaje y la semántica presente no incluyen cuantificadores absolutos ni identidad absoluta. Sin embargo, el sistema semántico permite que un objeto (en el sentido de un valor de una variable individual libre) pueda no ser identificable por ningún concepto sortal en absoluto, es decir, en símbolos, $\sim\exists S(x=_S x)$ es consistente en el sistema semántico. Esta semántica concuerda con la idea de la teoría filosófica conceptualista de no impedir la posibilidad de que pudiéramos referirnos a individuos en un modo absoluto, independientemente de los sortales. Asimismo, no hay una cláusula semántica correspondiente a la predicación respecto a sortales, porque ésta puede ser construida en términos de cuantificación e identidad sortal, como sigue: x es un $S =_{def} (\exists yA)(y =_S x)$.

Otro rasgo importante en el sistema semántico es que preserva la ley de Leibniz bajo identidad (sortal) relativa. (La justificación de este presupuesto es ofrecida en Freund, 2001, mediante los argumentos desarrollados en Wiggins, 2001 y Stevenson, 1972; para una visión que rechaza la ley de Leibniz bajo identidad sortal relativa, véanse Geach, 1972, 1973 y 1980.)

En Freund, 2000, el siguiente sistema formal de lógica para sortales fue formulado y se probó que es absolutamente consistente, sólido y completo respecto de la semántica anterior.

Axiomas

A0. Todas las tautologías
A1. $\forall xS\exists yS(y =_S x)$
A2. $B \rightarrow \forall ySB$, si y no figura libre en B
A3. $B \rightarrow \forall SB$, si S no figura libre en B
A4. $(x =_S x) \rightarrow \exists yS(y =_S x)$ donde y es una variable distinta de x
A5. $\forall SB \rightarrow B(H/S)$, si H está libre para S en B
A6. $(x =_S y) \rightarrow (x =_S x)$
A7. $\forall xS(B \rightarrow C) \rightarrow (\forall xSB \rightarrow \forall xSB)$
A8. $\forall S(B \rightarrow C) \rightarrow (\forall SB \rightarrow \forall SB)$
LL $(X =_S y) \rightarrow (B \leftrightarrow B^*)$ donde B* se obtiene de B al reemplazar una o más figuraciones libres de x por figuraciones libres de y.

Reglas

(1) De B infiérase $\forall ySB$
(2) De B infiérase $\forall SB$
(3) De B y $(B \rightarrow C)$ infiérase C.

CONCEPTUALISMO, MUNDOS POSIBLES Y POSSIBILIA

Las expresiones lingüísticas que implican modalidad han estado en medio de la discusión filosófica y los filósofos de la tradición analítica las han explicado mediante el uso de mundos posibles e individuos posibles (o *possibilia*). Así, enunciados como:

· Necesariamente 2+2=4.
· El mundo podría haber sido de otra manera.
· Podría haber objetos distintos de los objetos reales,
· Juan podría haber sido un investigador científico exitoso.
· Los dinosaurios podrían seguir existiendo en el siglo XXI.

Son traducidos, respectivamente (en términos de lenguaje de mundo posibles e individuos posibles), como sigue:

· En cada mundo posible es el caso 2+2=4.
· Hay mundos posibles que son diferentes del mundo real.
· Hay objetos posibles que son diferentes de los objetos reales.
· Hay un mundo posible en el cual Juan es un investigador exitoso.
· Hay un mundo posible en el cual los dinosaurios existen en el siglo XXI.

Estas entidades son filosóficamente peculiares, porque, aunque podrían ser asociadas en el mundo real con una cierta extensión, esto no basta para distinguir lo que nosotros consideraríamos como entidades intensionales distintas. Las propiedades y las proposiciones constituyen un ejemplo:

- la extensión de la proposición de que las ballenas son mamíferos en el mundo real es su valor de verdad (el cual, hasta donde sabemos, es la verdad) y así tiene la misma extensión que muchas otras proposiciones que intuitivamente serían identificadas como diferentes de esa, tales como las proposiciones de que el "Premio Nobel de la Paz, Óscar Arias fue el presidente de Costa Rica en el 2007" y que "El más alto edificio de Norteamérica en 2007 fue la torre Sears",

- la extensión de la propiedad de ser una criatura con corazón es la misma que la extensión de la propiedad de ser una criatura con riñones, pero nosotros las consideramos como propiedades diferentes.

Podrían darse criterios de identidad para identidades intensionales por medio de mundos posibles. Así, dos proposiciones (propiedades) son diferentes si y sólo si tienen las mismas extensiones en cada mundo posible. Y, en general, si e_1 y e_2 son entidades intencionales del mismo tipo, entonces serían idénticas si y sólo si tuvieran la misma extensión en cada mundo posible.

Un campo adicional de problemas, en el cual los mundos posibles han sido la fuente de soluciones, son aquellos asociados con relaciones sobre intensiones, tales como la causalidad y los contrafácticos. Los mundos posibles y los possibilia han sido empleados, también, como nociones esenciales en la semántica de la lógica modal.

La importancia de los mundos posibles y de los possibilia, en los contextos anteriores, ha motivado desarrollos de explicaciones filosóficas sobre la naturaleza de esas pretendidas entidades. Algunas de esas teorías constituyen enfoques realistas. Por ejemplo, David Lewis (1986) concibe los mundos e individuos posibles como entidades concretas con el mismo estatus ontológico que el de nuestro mundo y el de los individuos en él, respectivamente. Alvin Plantinga (1974) y Robert M. Adams (1979) interpretan los mundos posibles como entidades abstractas: como estados de cosas (en el primer autor) y propiedades (en el segundo). Varias opciones anti-realistas han sido también desarrolladas, pero sólo una de ella es conceptualista, ésta es la teoría caracterizada por Rescher (1975 y véase también 1979).

En general, la teoría conceptualista de Rescher pretende explicar los mundos posibles y los possibilia como construcciones conceptuales de entidades reales. En el caso de los possibilia, construimos individuos no-reales a partir de individuos reales por modificaciones de propiedades de estos últimos de un modo lógicamente consistente. Rescher distingue entre dos tipos de possibilia: variaciones de individuos reales e individuos supernumerarios. Si sólo modificamos mentalmente el conjunto completo de propiedades de un individuo real y mantenemos el conjunto de sus propiedades esenciales, obtenemos una variación de un individuo real. Si modificamos mentalmente el conjunto de sus propiedades esenciales (y quizá su conjunto completo de propiedades) obtenemos lo que él llama *un individuo supernumerario*.

Deberíamos notar que la distinción entre propiedades esenciales y no esenciales en la teoría de Rescher es más bien pragmática y depende del estado de cosas del mundo real, así como de cierto criterio cuya adopción está determinada por el marco concreto de un contexto-problema particular. En otras palabras, de una situación a otra uno podría esperar que diferentes criterios (que distingan entre propiedades esenciales y accidentales) sean operativos. Rescher ofrece cinco ejemplos de los criterios anteriores y piensa que con ello no se agotarían los prospectos razonables. En general, considera que cualquier criterio que distinga entre propiedades esenciales y accidentales no debería ser arbitrario y deberían mostrarse sus vínculos con cierto contexto de discusión filosófica.

La concepción de Rescher de propiedad esencial no está necesariamente implicada por el conceptualismo. En otras palabras, una visión conceptualista de propiedades esenciales como absolutas (y no relativista como la de Rescher) es posible. Pero claramente, si lo que es una propiedad esencial está determinado por la mente humana y los possibilia son en parte individuados por su conjunto de propiedades esenciales, entonces la concepción relativista de Rescher de lo que es una propiedad esencial ofreceria una fuerza adicional a una visión conceptualista de los possibilia.

En suma, los individuos no reales son explicados como productos del procedimiento conceptual de modificación de cierto conjunto de propiedades de individuos reales. Tanto el mundo actual con sus propiedades e individuos, como nuestra capacidad para modificar la naturaleza del conjunto de propiedades (esenciales o no) de estas entidades parecería proveer el fundamento ontológico en el cual descansan los possibilia (no reales).

Basándose en individuos posibles y teoría de conjuntos, Rescher explica la naturaleza ontológica de los mundos posibles. Los mundos posibles sólo son un conjunto de individuos posibles cumpliendo con ciertos requerimientos o condiciones generales. Él sólo cita requerimientos lógicos, nomológicos y metafísicos. Las condiciones lógicas requieren que ciertas relaciones lógicas internas deban mantenerse entre las propiedades de cada uno de los individuos posibles. Los individuos posibles no pueden ser recolectados en un conjunto cuando son lógicamente incompatibles, de tal manera que su realización conjunta es lógicamente imposible; por ejemplo, cuando las propiedades que comprenden individuos posibles de la colección implican contradicciones.

Los requerimientos nomológicos son aquellos determinados por las leyes de la naturaleza del mundo real. Los mundos posibles deberán preservar algunas de esas leyes o todas. Así, una colección de individuos posibles, algunos de cuyos miembros contienen propiedades que contradicen la totalidad de las leyes de la naturaleza, no es aceptable. Finalmente, aparte del mundo real, un conjunto de individuos posibles es un mundo posible sólo sí (1) no contiene individuos posibles que sean indiscernibles, esto es individuos posibles que tienen las mismas propiedades excepto que ellos sean meras proyecciones de individuos posibles reales indiscernibles; y (2) no contiene dos individuos posibles que sean variaciones de la misma entidad real. Ambos requisitos contienen las condiciones metafísicas para la construcción de mundos posibles. Debe notarse que Rescher no ofrece una justificación de que su tipo de condiciones nomológicas y metafísicas sean necesariamente requeridas por una perspectiva conceptualista de los mundos posibles.

En resumen, el conceptualismo de Rescher es una combinación de nuestras capacidades para aplicar operaciones teórico-conjuntistas y modificar mentalmente la composición del conjunto de propiedades de individuos, de los criterios relativistas para discriminar entre propiedades esenciales y no esenciales, y de cierta teoría lógica. Se pretende explicar la naturaleza ontológica de mundos e individuos posibles como sub-productos de la aplicación de esos factores: dados los individuos reales y sus propiedades, los individuos posibles son obtenidos modificando la composición de sus conjuntos de propiedades en un modo lógicamente consistente; dados los individuos posibles, los mundos posibles son obtenidos por construcciones teórico-conjuntistas de esas entidades.

Rescher no presenta una concepción filosófica de la teoría de conjuntos ni de la lógica y es claro, por las secciones previas, que una visión conceptualista de la lógica y la teoría de conjuntos es posible. Así, habría que preguntarse qué tanto la explicación de Rescher de los mundos e individuos posibles concuerda con un enfoque conceptualista. Él debería mostrar qué tipo de lógica y teoría de conjuntos (que sea justificable sobre fundamentos conceptualistas) le permitiría asumir la existencia de los conjuntos necesarios para la existencia de mundos posibles y, en el caso de los posibilia, la lógica (también justificable sobre fundamentos conceptualistas) relativa a la cual la mente modificaría, en un modo lógicamente consistente, el conjunto de propiedades de individuos reales. Por último, como ya señalé, Rescher no ofrece, desde una perspectiva conceptualista, una justificación de que los mundos posibles deban satisfacer sus condiciones nomológicas y metafísicas. Esto es, éstas son establecidas sin argumentos que muestren que son indispensables para un enfoque conceptualista de los mundos posibles. Éste es un problema importante, pues es obvio que una construcción conceptualista de los mundos posibles requiere, necesariamente, los dos tipos de condiciones, ya que hay modalidades conceptualmente admisibles además de la necesidad física, así como sistemas metafísicos que no validan ninguno de los principios 1 o 2 anteriormente mencionados. Otras críticas a la teoría de Rescher se han centrado en su concepción de la predicación esencial y en su explicación de los individuos posibles (véanse Levin, 1980; Martín, 1975; Newton-Smith, 1977 y Baldwin, 1975).

Sobre la base de su explicación conceptualista de mundos e individuos posibles, Rescher mismo desarrolló una lógica modal. El lector puede ver los detalles de esta lógica en Rescher (1975).

CONCLUSIONES

He presentado diferentes teorías filosóficas de corte conceptualista. Asimismo, he mostrado cómo ellas proveen justificación para la construcción de diferentes teorías lógicas o matemáticas. Es decir, se puede fundamentar la adopción de ciertos marcos lógicos o matemáticos en la naturaleza de las soluciones filosóficas conceptualistas. Estas soluciones dan forma a y explican rasgos de los sistemas semánticos y sintácticos de tal modo que, si se busca coherencia filosófica, la aceptación de esas soluciones conceptualistas involucrará la adopción de la teoría lógica o matemática correspondiente. Así, por ejemplo, si uno asume una posición conceptualista con respecto a los universales, el razonamiento en segundo orden involucra una preferencia por la lógica de segundo orden de acuerdo con los presupuestos de una teoría conceptualista de los universales; de lo contrario, uno podría ser acusado de incongruencia filosófica. El razonamiento modal basado en principios cuyo contenido corresponde a explicaciones conceptualistas de los possibilia y de los mundos posibles será el tipo de razonamiento que debe adoptar alguien que acepta esas explicaciones.

Como mostré en el caso de la lógica de segundo orden, el inverso no es válido. En otras palabras, uno podría razonar en concordancia con una teoría lógica formal susceptible de justificación desde una base conceptualista, sin contraer inmediatamente un compromiso con una teoría filosófica conceptualista. Esto se debe, como observamos, a las limitaciones en las capacidades expresivas de los sistemas formales.

BIBLIOGRAFÍA

Abelard, Peter (Pedro Abelardo) (1994), "Glosses on Porphyry", en Paul Spade (ed.), *Five Texts on the Mediaeval Problem of Universals*, Indianapolis, Estados Unidos, Hackett Publishing Co., pp. 26-56.

Adams, Robert Merrihew (1979), "Theories of actuality", en Michael J. Loux (ed.), *The Possible and the Actual*, Nueva York, Estados Unidos, Cornell University Press, pp. 190-209.

Armstrong, David M. (1989), *Universals and Opinionated Introduction*, Nueva York, Estados Unidos, Harper Collins.

Armstrong, David M. (1978), *Universals and Scientific Realism*, vol. 1: *Nominalism and Realism*, Cambridge, Reino Unido, Cambridge University Press.

Baldwin, T. (1975), "Review of Rescher (1975)", *Mind*, vol. 86, núm. 344, pp. 622-624.

Berkeley, George (1999), *Principles of Human Knowledge and Three Dialogues*, Oxford, Estados Unidos, Oxford University Press.

Beth, Evert Willen (1956), "Semantic construction of intuitionist logic", *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie von Wetensch Afdeling Letterkunde*, vol. 19, núm. 13, pp. 357-388.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1975), *Collected Works*, Ámsterdam, Holanda, North-Holland Publishing.

Campbell, Keith (1990), *Abstract Particulars*, Oxford, Reino Unido, Blackwell.

Carnap, Rudolf (1969), *The Logical Structure of the World*, Berkeley/Los Ángeles, Estados Unidos, University of California Press.

Chapell, Vere (1994), "Locke's theory of ideas", en Vere Chapell (ed.), *The Cambridge Companion to Locke*, Cambridge, Reino Unido, Cambridge University Press, pp. 26-55.

Cocchiarella, Nino (2007), *Formal Ontology and Conceptual Realism*, Nueva York, Estados Unidos, Springer Verlag.

Cocchiarella, Nino (1989), "Philosophical perspectives on formal theories of predication", en Dov M. Gabbay y Frang Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. IV: *Topics in the Philosophy of Languague*, Dordrecht/Boston, Holanda/Estados Unidos, D. Reidel, pp. 254-326.

Cocchiarella, Nino (1986), *Logical Investigations of Predication Theory and the Problem of Universals*, vol. 2: *Indices: Monographs in Philosophical Logic and Formal Linguistics*, Nápoles, Italia, Bibliopolis Press.

Cocchiarella, Nino (1980), "Nominalism and conceptualism as predicative second-order theories of predication", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 21, núm. 3, pp. 481-500.

Donagan, Alan (1963), "Universals and metaphysical realism", *Monist*, vol. 47, núm. 2, pp. 211-246.

Dummet, Michael (2000), *Elements of Intuitionism*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford University Press.

Freund, Max (2007), "A two dimensional tense-modal sortal logic", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 36, núm. 5, pp. 571-598.

Freund, Max (2004), "A modal sortal logic", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 33, núm. 3, pp. 237-260.

Freund, Max (2001), "A temporal logic for sortals", *Studia Logica*, vol. 69, núm. 3, pp. 351-380.

Freund, Max (2000), "A complete and consistent formal system for sortals", *Studia Logica*, vol. 65, núm. 3, pp. 367-381.

Geach, Peter (1980), *Reference and Generality*, Nueva York, Estados Unidos, Cornell University Press.

Geach, Peter (1973), "Ontological relativity and relative identity", en Milton K. Munitz (ed.), *Logic and Ontology*, Nueva York, Estados Unidos, New York University Press, pp. 287-302.

Geach, Peter (1972), *Logic Matters*, Berkeley, Estados Unidos, University of California Press.

Geach, Peter (1971), *Mental Acts*, Indiana, Estados Unidos, St. Augustine's Press.

Gentzen, Gerhard (1969), "Investigations into logical deduction", en M. E. Szabo (ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Ámsterdam, Holanda, North-Holland Publishing, pp. 68-131.

Goldblatt, Robert (1984), *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, Ámsterdam, Holanda, Dover Publication.

Godwyn, Martin y Andrew Irvine (2003), "Bertrand Russell´s logicism", en Nicholas Griffin (ed.), *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, Cambridge, Reino Unido, Cambridge University Press, pp. 171-201

Gracia, Jorge E. (1984), *Introduction to the Problem of Individuation in the Early Middle Ages*, Múnich, Alemania, Philosophia Verlag.

Grattan-Guiness, I. (2003), "Mathematics in and behind Russell´s logicism", en Nicholas Griffin (ed.), *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, Cambridge, Reino Unido, Cambridge University Press, pp. 51-83.

Grossmann, Reinhardt (1983), *The Categorial Structure of the World*, Bloomington, Estados Unidos, Indiana University Press.

Guyer, Paul (1994), "Locke's philosophy of language", en Vere Chapell (ed.), *The Cambridge Companion to Locke*, Cambridge, Reino Unido, Cambridge University Press, pp. 115-145.

Gupta, Anil (1980), *The Logic of Common Nouns*, New Haven/Londres, Estados Unidos/Reino Unido, Yale University Press.

Heyting, Arend (1956), *Intuitionism-An Introduction*, Ámsterdam, Holanda, North Holland Publishing.

Heyting, Arend (1934), *Mathematische Grundlangen Forschung, Intutionismus: Beweistheories*, Berlín, Alemania, Springer Verlag.

Heyting, Arend (1930), "Die formalin Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsberichte der preussischen Akademie von Wissenschaften. Physilalisch-mathematische Klasse*, pp. 42-56.

Hilbert, David (1964), *Hilbertiana: funf Aufsätze*, Darmstadt, Alemania, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Kleene, Stephen Cole (1952), *Introduction to Metamathematics*, Ámsterdam, Holanda, North Holland Publishing.

Kleene, Stephen Cole y Richard Eugene Vesley (1965), *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, Ámsterdam, Holanda, North Holland Publishing.

Kripke, Saul (1965), "Semantical analysis of intuitionist logic I", en John Crossley y Michael Dummett (eds.), *Formal Systems and Recursive Functions*, Ámsterdam, Holanda, North Holland Publishing, pp. 92-130.

Levin, H. (1980), "Review of Rescher (1975)", *Nous*, vol. 14, núm. 2, julio-diciembre, pp. 271-278.

Lewis, David (1986), *On the Plurality of Worlds*, Oxford, Reino Unido, Blackwell.

Locke, John (1959), *An Essay Concerning Human Understanding*, Nueva York, Estados Unidos, Dover Publication.

Loux, Michael (1978), *Substance and Attribute*, Dordrecht, Holanda, D. Reidel.

Martin, R. M. (1975), "Review of Rescher", *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 38, núm. 1, pp. 128-129.

Newton-Smith, W. H. (1977), "Review of Rescher (1975)", *The Philosophical Quarterly*, vol. 27, núm. 106, pp. 78-81.

Plantinga, Alvin (1974), *The Nature of Necessity*, Oxford, Reino Unido, Oxford University Press.

Quine, Willard Van Orman (1954), "On what there is", en Willard Van Orman Quine, *From a Logical Point of View*, Cambridge, Estados Unidos, Harvard University Press.

Quinton, Anthony (1973), *The Nature of Things*, Londres/Nueva York, Reino Unido/Estados Unidos, Routledge and Kegan Paul.

Rasiowa, Helena y Roman Sikorski (1963), *The Mathematics of Metamathematics*, Varsovia, Polonia, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe.

Rescher, Nicholas (1979), "The ontology of the possible", en Michael J. Loux (ed.), *The Possible and the Actual*, Nueva York, Estados Unidos, Cornell University Press, pp. 166-181.

Rescher, Nicholas (1975), *A Theory of Possibility: A Constructivist and Conceptualist Account of Possible Individuals and Possible Worlds*, Pittsburgh, Estados Unidos, University of Pittsburgh Press.

Rodriguez-Pereira, Gonzalo (2002), *Resemblance Nominalism: A Solution to the Problem of Universals*, Nueva York, Estados Unidos, Oxford University Press.

Russell, Bertrand (1938), *Introduction to Mathematical Philosophy*, Nueva York, Estados Unidos, Simon and Schuster.

Sellars, Wilfrid (1963), "Abstract entities", *Review of Metaphysics*, vol. 16, pp. 627-671.

Stevenson, Leslie (1972), "Relative identity and leibniz's law", *The Philosophical Quarterly*, vol. 22, núm. 87, pp. 155-158.

Stone, M. H. (1937), "Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics", *Casopis*, vol. 67, pp. 1-25.

Spade, Paul (1985), *A Survey of Medieval Philosophy* [http://pvspade.com/Logic/docs/Survey%202%20Interim.pdf] consultado: noviembre de 2007.

Strawson, Peter Frederick (1959), *Individuals*, Londres, Reino Unido, Metheuen.

Tarski, Alfred (1956), "Sentential calculus and topology", en Alfred Tarski, *Logic, Semantics and Metamathematics*, Oxford, Reino Unido, Oxford University Press, pp. 421-454.

Toesltra, Anne S. (1969), *Principles of Intuitionism*, Berlín, Alemania, Springer Verlag.

Tweedale, Martin M. (1976), *Abelard on Universals*, Ámsterdam, Holanda, North Holland Publishing.

Van Dalen, Dirk (2002), "Intuitionistic logic", en Dov M. Gabbay y Fray Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 5, Berlín, Alemania, Springer Verlag.

Van Stigt, W. P. (1990), *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam, Holanda, North-Holland Publishing.

Williams, Donald Cary (1953), "The elements of being", *Review of Metaphysics*, vol. 7, pp. 3-18 y 171-192.

Wiggins, David (2001), *Sameness and Substance Renewed*, Cambridge, Estados Unidos, Harvard University Press.

Wolterstorff, Nicholas (1973), *On Universals*, Chicago, Estados Unidos, University of Chicago Press.