Signos Filosóficos, vol. XXIII, no. 46, July-December, 2021, 150-177

What is the concept of horse?

Max Fernández de Castro
ORCID.ORG/0000-0003-0750-284X
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa
Departamento de Filosofía
xamf_mx@yahoo.com

María Espinoza Coronel
ORCID.ORG/0000-0002-1945-9909
Universidad Nacional Autónoma de México
Estudiante del Doctorado en Filosofía de las Ciencias
otompafilos@gmail.com

Abstract: *As is well known, Frege stated that the expression 'the concept horse' refers to an object and not to a concept. In this article we firstly show how there are some hints of this paradox in texts prior to 1891. Secondly we review some arguments given in the literature to hold that with 'the concept horse' Frege referred to the extension of the mentioned concept. Finally, we argue that, even if the concept horse is such an extension, we still know very little about its nature, given the fragmentary way in which Frege introduces the extensions of concepts in* Grundgesetze *and in previous essays.*

Keywords: Frege; innefability; extension; representation; paradox

Reception: 03/06/2020 **Acceptance: 01/07/2021**

¿Qué es el concepto *caballo*?

Max Fernández de Castro
ORCID.ORG/0000-0003-0750-284X
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa
Departamento de Filosofía
xamf_mx@yahoo.com

María Espinoza Coronel
ORCID.ORG/0000-0002-1945-9909
Universidad Nacional Autónoma de México
Estudiante del Doctorado en Filosofía de las Ciencias
otompafilos@gmail.com

Resumen: Como es muy conocido, Frege afirmó que la expresión 'el concepto caballo' se refiere a un objeto y no a un concepto. En este artículo, en primer lugar, mostramos cómo hay algunos barruntos de esta paradoja en textos anteriores a 1891. En segundo lugar, revisamos algunos argumentos que defienden que con el término 'el concepto caballo' Frege se refería a la extensión del mencionado concepto. Por último, sostendremos que, aun cuando el concepto caballo sea dicha extensión, es muy poco lo que sabemos de su naturaleza. Esto último se debe a la forma fragmentaria en que Frege introduce las extensiones de concepto en los *Grundgesetze* y en ensayos previos.

Palabras clave: Frege; inefabilidad; extensión; representación; paradoja

Recibido: 03/06/2020 **Aceptado: 01/07/2021**

La respuesta a Kerry

En su artículo "Sobre concepto y objeto" (1892), Gottlob Frege responde a las objeciones que Benno Kerry le hace en contra de la tesis según la cual la distinción entre las categorías de concepto y objeto es absoluta. Como muestra Carlo Proietti (2010), uno de los pocos estudiosos contemporáneos de los escritos de Kerry, la disputa con Frege iba más allá de un desacuerdo verbal, pues concernía a cuestiones ontológicas y de fundamentos de las matemáticas. Kerry había asimilado algunas de las principales tesis de Bernard Bolzano, las cuales constituían el trasfondo de su pensamiento. En lo que corresponde a nuestro tema, es suficiente decir que para Kerry esa distinción entre concepto y objeto no era absoluta (es decir, algo puede caer en ambas categorías, como un individuo puede ser padre e hijo simultáneamente) ni tampoco aceptaba el criterio (gramatical) de Frege para distinguir a una cosa de un concepto. Pensaba, al igual que Bertrand Russell en años posteriores, que la forma gramatical de un enunciado no tiene por qué reflejar la estructura de la proposición representada.

Uno de los argumentos de Kerry puede reformularse de la siguiente manera. Podemos decir que en las frases 'Fred cae bajo el concepto caballo' y 'El concepto caballo es fácilmente asequible', las figuraciones del término 'el concepto caballo'[1] designan respectivamente a un concepto y a un objeto. No hay razón para pensar que estemos usando la expresión de manera ambigua. Se sigue que 'el concepto caballo' denota una entidad que a veces oficia como objeto y, otras, como concepto. En general ¿no podría una expresión usarse unas veces como sujeto y otras como predicado (tal vez con alguna variación menor), a pesar de designar una misma entidad?

En 1903, Russell enfrentó un problema similar y adoptó una solución que se asemeja a la sugerida por Kerry. Él distingue dos clases de términos: *cosas* y *conceptos*. "Los primeros son los términos indicados (*indicated*) por los nombres propios, los últimos, los indicados por todas las demás palabras" (1903: 73).[2] Aparentemente 'la humanidad' y 'humano' significan diferentes entidades, pues

1 Usamos aquí el entrecomillado simple para indicar que la expresión en cuestión está siendo mencionada y no usada.

2 La numeración corresponde a la traducción española citada en la bibliografía.

una es un nombre propio y la otra un adjetivo. Sin embargo, aquí Russell se aparta de la gramática, pues en su opinión, estamos aludiendo al mismo concepto con ambas palabras. Cuando éstas figuran en oraciones (por ejemplo, 'Sócrates es humano' y 'La humanidad pertenece a Sócrates'), lo que cambia es, en todo caso, su modo de figuración. La razón para considerarlo así es que distinguirlas nos llevaría a una paradoja: "si damos cabida a tal punto de vista nos veremos envueltos en intrincadas dificultades" (Russell, 1903: 75). Efectivamente, esta distinción conduce a la paradoja del concepto caballo: en su respuesta a Kerry, Frege sostiene que el concepto caballo es un objeto, no un concepto. Los términos que denotan conceptos son insaturados, a diferencia de 'el concepto caballo'.

¿Por qué es importante esta distinción? Porque con ella Frege pretende resolver un problema central en la filosofía que había aparecido en Kant y reaparece en los filósofos del siglo xx, a saber: el problema de la unidad de la proposición. Frege lo afronta con una metáfora de la química: lo que permite ensamblar los elementos de la proposición es la instauración de las funciones. Los objetos se adhieren a los huecos que la función tiene.

Sin embargo, la idea de que el contenido de un enunciado debe formarse con una parte insaturada y otra completa es compatible con que una misma entidad pudiese jugar ambos roles dependiendo de su "forma de figuración". Por ejemplo, podríamos pensar que en el contenido de 'El concepto caballo es un caballo' aparece una sola entidad correspondiendo al sujeto y al predicado de la oración. Una de sus figuraciones sería predicativa y la otra no. Frege tomó otro camino: uno donde la distinción entre objeto y concepto es absoluta y la erige como un principio central, tanto de su filosofía, como de su lógica, con todo lo que ello implica.

Ahora bien, si la expresión 'el concepto caballo' designa a un objeto, la pregunta es ¿cuál? Esa es la cuestión central que trataremos. Varios autores han defendido que la respuesta es: la extensión del concepto caballo. Veremos que los argumentos ofrecidos en favor de esta tesis son sólidos, siempre y cuando la precisemos y maticemos adecuadamente. Sin embargo, sostendremos que esa respuesta es insuficiente.

El primer paso es aclarar un punto relativo a su formulación. Supongamos que la expresamos así: "La referencia de 'el concepto caballo' es la extensión del concepto caballo". O, lo que es equivalente, "El concepto caballo es la extensión del concepto caballo". Hay dos problemas: a) estamos determinando o definiendo un objeto en términos de sí mismo y b) si la expresión 'el concepto caballo' es problemática, de nada sirve tratar de aclarar su significado con otra expresión que la contiene.

Por ello es importante tener en mente la siguiente distinción. Al decir 'el concepto caballo' está, por un lado, aquello de lo que queremos hablar y, por otro, de lo que realmente hablamos. Queremos referirnos a un concepto, pero designamos un objeto. La tesis a la que ya hicimos alusión es que 'el concepto caballo' denota a la extensión *del concepto caballo*, siempre y cuando entendamos que la expresión subrayada alude a aquello de lo que quisiéramos hablar. Entendida de la otra forma, es decir, textualmente, diría que el concepto caballo es la extensión de la denotación de 'el concepto caballo', pero como esta expresión denota un objeto, estaríamos hablando de la extensión de un objeto, lo que sería absurdo. Philippe de Rouilhan (1988) dedica una extensa sección a esta dificultad. En lo que sigue formularemos la tesis con esa salvedad, esperando la buena voluntad del lector.

Esto explica muy bien por qué, si Frege realmente sostuvo que tal era la referencia de la expresión 'el concepto caballo', nunca lo enunció explícitamente. No sólo era el temor de que se confundiesen objetos y conceptos en la mente del lector, sino también era una dificultad insoslayable en la formulación de su pensamiento.

Tomada esta precaución, y hecha la advertencia para todo lo que sigue, revisaremos algunos ejemplos dados en la literatura para sostener, no que la referencia de 'el concepto caballo' es la extensión del concepto caballo, sino que Frege empleó la expresión 'el concepto caballo' para referirse a dicha extensión. Otra cosa muy diferente es a lo que la expresión realmente se refiere. Haremos énfasis en la primera cuestión y poco en la segunda. Por último, nos preguntaremos qué es la extensión del concepto caballo. ¿De qué objeto estamos hablando? Nuestra respuesta será que lo ignoramos.

Frege fue refinando progresivamente sus ideas de lo que es un concepto desde 1879 hasta 1891. Sólo a partir de 1891 explica con precisión sus ideas a ese respecto. Sin embargo, haremos una breve revisión de su obra en el periodo mencionado para rastrear algunas trazas del problema que nos ocupa porque, después de todo, este no tiene tanto que ver con la semántica del sentido y la referencia, expuesta a principios de la década de 1890, ni con la idea de que los conceptos son funciones, como con la distinción saturado-insaturado que, en cierta manera, ya aparecía en la *Conceptografía*[3] (sería sorprendente que hubiese reparado en esa dificultad sólo algunos años más tarde). Con ello también veremos que la noción de concepto que Frege introduce presenta algunas novedades en relación con la tradición.

Antes distingamos cuatro casos muy diferentes donde queremos decir algo que involucra a esa entidad a la que parece aludir, sin lograrlo, el término 'el concepto caballo'. Recuerde el lector que no hablaremos ahora ni de lo que esa expresión realmente denota ni del significado que Frege pudo atribuirle, sólo de lo que sugiere. En el primer caso queremos decir que esa expresión subsume a Fred. En el segundo deseamos expresar que una de sus notas características es *ser equino*. El tercero es aquel donde queremos atribuirle una propiedad, por ejemplo, no ser vacío. En el último queremos expresar algo más general, pongamos por caso, que ningún concepto es un objeto. Los tres primeros casos podrían ser respectivamente llamados "subsunción", "subordinación" y "predicación de orden superior" y los separamos del cuarto porque, a diferencia de éste, no son problemáticos.

La inefabilidad de las diferencias categoriales[4]

Claramente no hay ningún problema para expresar una predicación de primer orden (del tipo "Fred es un caballo") en el lenguaje de la *Conceptografía*. Un ejemplo del segundo caso mencionado es 'Toda ballena es un mamífero', es decir, que el *ser mamífero* es una marca del concepto *ser ballena*. *Ser mamífero* no es propiedad del concepto *ballena*, sino de cualquier objeto que caiga bajo él. Ese caso no debe confundirse con el tercero, aquel en que atribuimos una propiedad a un concepto y que se expresa sin dificultad en el lenguaje de la primera conceptografía (1879). Por ejemplo, podemos decir que hay algo que es un caballo. El cuarto caso es de otro orden. En un cierto sentido lo que queremos decir no puede ser expresado en el lenguaje lógicamente perfecto de la conceptografía. Es algo que subyace a

3 Usaremos 'Conceptografía' para Frege 1879, y 'conceptografías' para los lenguajes formales expuestos en la obra anterior y en *Grundgesetze*, es decir, en Frege, 1893 y 1903.

4 En esta sección retomamos una idea de Ian Proops quien separa varios tipos de problema de inefabilidad en la obra de Frege.

su propia estructura y que, al ser presupuesto de toda expresión formulable en ese lenguaje, es inexpresable en él.

Con su conceptografía, Frege ofrece un lenguaje para el pensamiento puro, es decir, uno cuya estructura no es arbitraria, sino que refleja la estructura del pensamiento, comprendido este en un sentido lógico, no psicológico. Ahora bien, las distinciones lógicas presupuestas en la comprensión de este lenguaje son inefables en él. La idea es que no podemos decir, por ejemplo, que lo que distingue a los objetos de las funciones es que los primeros son saturados y los segundos no, porque para que esta frase tuviera sentido debería tenerlo el adscribir la propiedad *saturado* tanto a funciones como a objetos, pero eso es justamente lo que la frase en cuestión intenta proscribir. Tiene sentido decir que el 2 es un número primo, como tendría sentido negarlo. En cambio, las propiedades *saturado* e *insaturado* no pueden atribuirse a la vez a funciones y a objetos. Si algo es saturado, no es falso decir que es insaturado, simplemente no tiene sentido. En palabras de Frege: "Yo no quiero decir que es falso afirmar de un objeto lo que es dicho aquí respecto de un concepto; yo quiero decir que es imposible, que no tiene sentido decirlo. El enunciado 'hay un Julio César' no es ni verdadero ni falso, sino sin sentido" (1892: 189).

En cambio, podemos imaginar que tales frases aparezcan en la explicación propedéutica con que se enseña a un aprendiz el lenguaje lógicamente perfecto. Como transgreden las reglas gramaticales que están imponiendo y que son válidas para el lenguaje del pensamiento puro, estrictamente carecen de sentido, pero esclarecen la gramática de ese lenguaje. Una vez instalados en la conceptografía, la regla 'ningún concepto es objeto' será inexpresable.

Este es un tema arduo y no intentamos desarrollarlo aquí. La pregunta es si el ejemplo de Kerry entra en esta especie. No se puede decir de un concepto que es un concepto ni tampoco negarlo. ¿No podría Frege haber contestado a Kerry que su frase carece de sentido? Tal vez la frase 'El concepto caballo no es un concepto' entre en esta última categoría, pero el ejemplo de Kerry es más sencillo y conviene atenerse a él: 'El concepto caballo es fácilmente asequible'. En este caso, la respuesta parecería ser negativa porque la dificultad es muy particular y proviene del uso de una expresión saturada para intentar hablar de una entidad insaturada. El ejemplo de Kerry no expresa una regla gramatical general subyacente al lenguaje lógicamente perfecto e inexpresable en él. La dificultad es de otro tipo. Para analizar esta cuestión con mayor profundidad, veamos brevemente si en la obra de Frege anterior a 1890 hay algún barrunto del problema del concepto caballo, para después revisar cómo introduce las extensiones de concepto y la noción de "representación".

Algunos párrafos del periodo a revisar parecen presuponer ideas que sólo serán desarrolladas más tarde y que examinaremos en secciones posteriores con más detenimiento. Sin embargo, a fin de hacer más claros los siguientes párrafos, haremos una observación terminológica de manera un tanto críptica. Como veremos, Frege dirá en su obra madura que un concepto es representado por un objeto al que llamará su extensión. Esto le permitirá hablar de un concepto vía su extensión y, en particular, expresar (o, como diremos, representar) una predicación de orden superior por otra de orden inferior.

'El concepto F' antes de 1890

En *Conceptografía*, una función es lo que queda de un enunciado cuando uno o varios de sus términos singulares son reemplazados por variables.[5] Así, un enunciado puede ser considerado como compuesto de una parte fija (la función) y otra variable, a saber, los argumentos, es decir, nombres (en sentido amplio) que pueden ser substituidos por otros. Allí Frege no hace aún la distinción entre la expresión fija (que luego llamará "término funcional") y lo que denota (la función misma).[6] La arbitrariedad con que puede realizarse esta separación y el hecho de que la función así obtenida pueda luego instanciar un cuantificador de orden superior, son dos de los más poderosos instrumentos de la lógica fregeana. En algunos escritos póstumos, presuntamente escritos un poco antes de 1884 (1881: 6-46; 1882: 47-52), Frege hace aclaraciones interesantes sobre la manera en que concibe los conceptos, muy particularmente acerca de cómo pueden formarse con gran facilidad con la aludida división de las partes de una oración, flexibilidad que no tiene el sistema de George Boole. Allí aparecen muchos temas en los que Frege profundizará, pero usa expresiones del tipo "el concepto F" sin reticencia alguna. Se dice allí, por ejemplo, que '$2^4=16$' puede leerse como "2 es una raíz

5 En realidad, esto sólo es válido para funciones de primer orden.

6 Desde luego, el término 'denotación' (*Bedeutung*) será introducido más tarde. Podríamos decir que Frege identifica la función con la expresión (que tiene variables) y no con su contenido.

cuádrupla de 16", como "el individuo 2 cae bajo el concepto raíz cuádrupla de 16" o "pertenece a la clase de las raíces cuádruplas de 16" (1881: 16-17). Frege se refiere allí simplemente a las diversas maneras en que se puede descomponer un juicio.

En varios pasajes de *Grundlagen*, Frege esclarece lo que entiende por "concepto". Son interesantes, y muy especialmente, cuando aparece una expresión del tipo "el concepto…". Una vez que ha dado sus tres famosos principios metodológicos, respecto al tercero hace esta enigmática afirmación: "… es sólo una ilusión creer que, sin alterarlo, un concepto puede hacerse un objeto" (1884: 113). En los primeros párrafos, menciona que su método podrá contribuir a la formación[7] de conceptos (aludiendo al método que antes mencionamos de separación de una oración) y de cómo los conceptos pueden descomponerse en otros más simples. En la segunda parte aparece, incluso en su título, la expresión 'el concepto de número', sin que el autor parezca advertir dificultad alguna en el uso de la misma. En la tercera (§ 29) se menciona por vez primera en la obra la extensión de un concepto: "El contenido de un concepto disminuye cuando aumenta su extensión" (1884: 144). Allí las palabras (incluso 'contenido') parecen emplearse de manera tradicional. Frege se refiere a que entre más notas tenga el concepto (o más determinaciones intervengan en su definición), menor será el número de objetos que subsuma. En el § 46 se lee "cuando digo 'Venus tiene 0 lunas' entonces… al concepto 'luna venusina' se le ha adscrito, con ello, una propiedad…" (1884: 159). De nuevo se refiere a un concepto por medio de un término que comienza con un artículo definido. Al parecer, Frege ve la frase mencionada como una predicación de segundo orden, es decir, la expresión 'el concepto *luna venusina*' se emplea no para referirse a su denotación, sino para mencionar un concepto. Podríamos interpretarla como una anticipación de lo que más tarde hará constantemente, a saber, expresar una predicación de segundo orden con una de primero, pero nada sugiere aún esta lectura. Después aclara la distinción entre las marcas de un concepto y sus propiedades o, lo que es equivalente, entre la subordinación y

7 El término "formación de conceptos", al que seguiremos recurriendo, parece inadecuado porque da a entender una dependencia que el concepto tendría con la cognición, contrariamente a lo que Frege piensa al respecto. Sin embargo, él usa constantemente esa expresión cuando compara su conceptografía con la lógica de Boole. Véase, por ejemplo, Frege, 1979: 34.

la predicación de orden superior. Allí se usan, sin recelo, expresiones con artículos definidos para referirse a conceptos particulares. Cuando aclara que un número no debe ser considerado como una propiedad (§ 57), agrega: "en la proposición 'el número 0 pertenece al concepto F', 0 es sólo un elemento del predicado (tomando el concepto F como el sujeto real)" (1884: 166).[8] Aparece aquí, una vez más, una expresión de la forma "el concepto…", la cual es señalada como el sujeto de la frase. Recuérdese que al principio ha mencionado la posibilidad de alterar un concepto para volverlo un objeto. ¿Es esta una anticipación de lo que llamará "representación" (de un concepto por un objeto) o se refiere, como antes, a una predicación de orden superior? Nada hace pensar en lo primero, sin embargo, así podría interpretarse la célebre nota 88. Como es conocido, Frege define 'el número que corresponde al concepto F' como la extensión del concepto *equinumérico al concepto F*. Sobre la palabra 'extensión' viene un asterisco que corresponde a la nota mencionada:

> Creo que simplemente podría decirse "concepto", en lugar de "extensión de concepto". Pero se objetaría de doble manera: 1. Esto está en contradicción con mi primera afirmación de que el número individual es un objeto […] 2. Los conceptos podrían ser de iguales extensiones sin tener que coincidir. De esta suerte, ciertamente soy de la opinión que ambas objeciones podrían ser superadas, pero llevaría muy lejos emprender esto aquí. Presupongo que se sabe qué es la extensión de un concepto. (1884: 175)

El primer punto está en consonancia con la posterior respuesta a Kerry. Allí Frege aclara que no es que el número pueda ser un concepto y también un objeto, sino que, en el contexto de esa definición, la expresión 'extensión del concepto' pudo ser substituida por 'el concepto'. No dice que en cualquier contexto ambos términos sean intercambiables sin pérdida. Al parecer, ya tenía en mente la representación de un concepto por su extensión y, en ese sentido, tal vez pueda darse la misma interpretación a los párrafos anteriormente mencionados, donde era dudoso si se refería a una predicación de orden superior. En

8 En la traducción al español de Hugo Padilla "…si consideramos al concepto F como sujeto cósico". El original dice: "… wenn wir als sachliges Subject den Begriff betrachten".

realidad, no sabemos qué sean las extensiones de conceptos. Hacia el final de la obra, a este respecto dice:

> Este modo de superar la dificultad ciertamente no encontrará consenso general, y muchos preferirán allanar la dificultad de otra manera. Yo tampoco pongo un peso decisivo en recurrir a las extensiones de conceptos. (Frege, 1884: 205.[9] Traducción nuestra.)

Ahora bien, este párrafo sugiere que habría maneras de definir 'número' sin recurrir a extensiones de conceptos, lo cual claramente está en contra de lo que dirá más tarde. Tal vez, como veremos, no está usando la expresión 'extensión de concepto' de la manera habitual.

Es hasta la década de 1890, en "La Ley de la Inercia" (Frege, 1885a: 123-136), donde Frege explica su forma novedosa de entender la palabra 'concepto', pero en "Función y concepto" (Frege, 1891: 137-156) expone sus ideas al respecto, ya refinadas, con detenimiento y mayor rigor. Concluimos que, antes de este ensayo, Frege utiliza expresiones de la forma "el concepto F" sin ninguna reticencia. Sin embargo, algunos párrafos de *Grundlagen* podrían leerse como si el autor tuviese en mente ideas sólo presentadas plenamente años más tarde.

La introducción de los rangos de valores

En "Función y concepto", Frege explica y justifica la distinción entre sentido y referencia, aclara la noción de función usada hasta entonces sin mucha precisión en matemáticas, extendiéndola, tanto al tipo de operaciones que pueden entrar en su formación, como a la clase de argumentos y valores que admite. Sin embargo, esta extensión concuerda con la forma en que la noción de función fue empleada en la *Conceptografía* como instrumento fundamental de la lógica. Ahora, un concepto es concebido como una función de primer orden de aridad uno que al completarse con cualquier argumento genera un valor de verdad. También distingue entre funciones de órdenes superiores y de distintas variables (entre las cuales

9 El número de página corresponde a traducción española.

están las relaciones) e introduce los rangos de valores (entre los cuales estarán las extensiones de conceptos). Veamos este último punto.

Frege recuerda que la geometría analítica "nos provee un modo de representar intuitivamente los valores de una función para distintos argumentos" (1891: 141). Se refiere, por supuesto, a la gráfica de la función en un eje cartesiano. Nótese que usa la palabra 'representar'. Señala que dos funciones pueden tener los mismos valores para los mismos argumentos, como ocurre, por ejemplo, con las simbolizadas respectivamente por '$x(x-4)$' y 'x^2-4x', cuyas curvas coinciden. Dice entonces "yo expreso esto como sigue: la función $x(x-4)$ tiene el mismo rango de valores que la función x^2-4x" (1891: 142), introduciendo la noción de rango de valores. Enseguida aclara que la ecuación '$x(x-4)=x^2-4x$' no afirma la identidad de las dos funciones. Ambos lados de la ecuación sólo indican un número indeterminadamente y si la entendemos como un enunciado donde la variable está cuantificada universalmente, entonces no tenemos un enunciado de identidad. La única forma de obtener de allí una identidad es por medio de los rangos de valores.

> La posibilidad de considerar una igualdad que se mantiene generalmente entre valores de una función como una igualdad particular, por ejemplo, una igualdad entre rangos de valores es, yo pienso, indemostrable: debe ser tomada como una ley de la lógica. (1891: 142)

En el caso de un concepto F, Frege llama a su rango de valores "la extensión de F". Enseguida formaliza la mencionada identidad de la manera siguiente: $\grave{\varepsilon}(^2-4\varepsilon)=\grave{\alpha}(\alpha(\alpha-4))$. Más adelante dirá que la relación de identidad es una relación binaria que se da o no entre objetos y que, por lo tanto, no podemos ni afirmar ni negar que dos funciones son iguales, pero concederá que una relación similar a la identidad podría darse entre funciones, si estas tuvieran los mismos valores para los mismos argumentos.[10] Por ejemplo, en lugar de decir que cualquier objeto es bípedo implume si y sólo si es humano, podemos decir que la extensión del concepto *bípedo implume* es igual a la extensión del concepto *humano*.

10 "Pero, incluso si la relación de igualdad sólo es pensable en el caso de los objetos, hay sin embargo, en el caso de los conceptos una relación análoga" (Frege, 1979: 120).

En un primer momento, la expresión ‘extensión de concepto’ es introducida sincategoremáticamente. Recuérdese que la segunda “definición” de ‘número que corresponde al concepto F’, en los *Grundlagen,* a saber, “el número que corresponde al concepto F es igual al número que corresponde al concepto G si y sólo si F es equinumérico con G” (§ 69), es insatisfactoria, pues sólo permite determinar la identidad de dos números si estos son presentados como “el número que corresponde al concepto F”, donde F alude a un concepto dado. No tenemos posibilidad de eliminar el *definiendum* en cualquier contexto usando la definición. Por ello no podemos decir que denote un objeto, esto es, una entidad independiente. En cambio, Frege trata las extensiones de concepto como objetos, a pesar de que no son introducidas como tales, ni aquí ni en *Grundgesetze*. Así lo dice explícitamente (*cfr*. 1891: 147) y además se refiere a la expresión ‘ε`f(ε)’ como denotando una función de segundo orden que toma como argumentos funciones de primer orden y cuyos valores son sus rangos. Por último, sugiere que hay funciones de orden superior, pero aquellas más allá del segundo orden son, en cierto sentido, redundantes. Sólo conseguirá reducir predicaciones de órdenes superiores a otras de primer orden con un uso indiscriminado de los rangos de valores considerados como objetos.

Si llamamos C-identidad a la relación semejante a la identidad pero que se da entre conceptos, ¿deberíamos suscribir ese criterio de C-identidad? Es decir, ¿que entre los conceptos F y G se da una relación similar a la identidad si subsumen exactamente los mismos objetos? Aparentemente esa es una consecuencia de identificar los conceptos con la referencia de los términos conceptuales, como Frege reconoce. Veámoslo con detenimiento. Asumamos que la referencia de un nombre propio es su portador y, la de un enunciado, su valor de verdad. Ahora bien, consideremos un enunciado en que figura un término general F(x) en un contexto directo. ¿Qué términos generales pueden reemplazar a F(x) de tal manera que el valor de verdad de los enunciados resultantes sea, en cada caso, el mismo que el del enunciado original? Claramente son los términos generales que sean satisfechos por los mismos objetos que satisfacen F(x). El argumento es análogo al usado para determinar la referencia de otras expresiones. Pero ¿a qué conclusión nos lleva? Aparentemente, podemos decir que, si ‘F(x)’ y ‘G(x)’ son satisfechos por los mismos objetos, entonces tienen la misma referencia. Pero ¿es correcto el razonamiento dado? Aquí será útil el ejemplo de Kerry. En el sentido intuitivo o tradicional de los términos, un concepto F podría distinguirse de otro, G, de dos maneras en cuanto a la relación de subsunción se refiere. Puede ocurrir que F subsuma un objeto que G no, o viceversa. Digamos entonces que difieren "por debajo". También pudiera ser que se distinguieran, porque uno tiene una propiedad de orden superior del que el otro carece, entonces serían distintos "por arriba" (la nota 88 de *Grundlagen* menciona esa posibilidad). Supongamos que definimos dos conceptos, uno de una manera simple y el otro de una forma más compleja, descubriendo finalmente que subsumen exactamente los mismos objetos. ¿No pudiera ser que difirieran? En general, ¿podrían dos conceptos diferir por debajo y no por arriba? En la lógica de la *Begriffsschrift* no, porque todo objeto x da pie a un concepto X de segundo orden que subsume sólo a los conceptos que subsumen a x. Por ejemplo, a Donald Trump corresponde un concepto de segundo orden que sólo subsume a los conceptos de primer orden bajo los que él cae. Entonces, si x cae bajo F, pero no bajo G, X subsume a F, mas no a G. Por otro lado, ¿podrían dos conceptos diferir intensionalmente, es decir, sólo por arriba? En ese caso, el argumento de Frege no funciona. En el contexto "F es fácilmente definible", 'G' no sería intercambiable por 'F' *salva veritate*, aun si ambos conceptos coincidieran por abajo. Para ilustrarlo estamos suponiendo que el contexto '… es fácilmente definible' es directo.[11] Aceptando esta hipótesis provisionalmente, podría responderse que la definición de F también define G porque son idénticos, pero eso sería una petición de principio. En sistemas como *Principia Mathematica*, dos conceptos pueden diferir sólo por la manera en que están definidos. En esta opción, los términos conceptuales no pueden tener como referencia conceptos identificados sólo por debajo. Así que el argumento de Frege para determinar la referencia de un término conceptual requiere de una premisa adicional.

Frege insiste en que la relación lógica fundamental es la predicación de primer orden.[12] Eso significa que toda otra relación conceptual de cualquier orden deriva en última instancia de que un objeto caiga, o no, bajo un concepto. Si tal es el caso, entonces los conceptos no pueden diferir si coinciden por abajo.

Ahora bien, ¿por qué llamar "concepto" a esa referencia compartida entre términos conceptuales satisfechos exactamente por los mismos objetos? Al parecer

11 En contextos indirectos, la falla de sustitutividad *salva veritate* no indica una diferencia de propiedades en la referencia de los términos en cuestión.

12 Frege, *Coments on sense and reference*,1892-1895: 118.

porque, por un lado, la noción de concepto pertenece a la lógica y, por otro, de acuerdo con Frege, la intensión no es de la incumbencia de esta disciplina:

> Un término conceptual denota un concepto, si la palabra es usada como es indicado hacerlo en lógica. Para explicar eso, hago notar un hecho que habla netamente en favor de los lógicos de la extensión, por oposición a los del contenido, a saber que, sin prejuicio de la verdad, en toda frase, dos términos conceptuales se pueden reemplazar el uno por el otro si les corresponde la misma extensión de concepto y que, en consecuencia, igualmente en lo que concierne a la inferencia y a las leyes lógicas, los conceptos se comportan de manera diferente sólo en tanto que sus extensiones son diferentes. (1979: 118)

Es decir, puesto que la lógica tiene como tema la verdad y esta se encuentra a nivel de la referencia, no debe ocuparse del contenido (es decir, del sentido).

Sin embargo, esto parece contravenir la nota 88 de *Grundlagen*. Puede responderse que no sabemos si esta nota refleja un objetante imaginario que no es Frege, como sugiere de Rouilhan, o simplemente se refiere a que los conceptos no pueden ser idénticos (pues la identidad es una relación que se da entre objetos) o, por último, a que Frege cambió de opinión a este respecto. Pero volvamos a la década de 1890.

En la cita anterior, es interesante que para Frege los conceptos se comportan de la misma manera, considerados desde un punto de vista lógico, "si les corresponde la misma extensión". En sus escritos de la década anterior, con "la extensión de un concepto" parece referirse a la pluralidad (usando nosotros esta palabra con deliberada vaguedad) de objetos que subsume, como era tradicional en lógica. Así, dos conceptos que subsumen exactamente los mismos objetos son co-extensionales. En "Función y concepto" se dice que (*) a dos conceptos co-extensionales les corresponde la misma extensión. Ahora 'extensión' en esta última figuración es empleada en el sentido técnico que Frege le da, es decir, la frase (*) no es una tautología o, mejor dicho, no es una trivialidad.[13] Frege dice que si dos conceptos son coextensionales, entonces la función de segundo orden $\grave{\varepsilon}X(\varepsilon)$ les asocia un mismo objeto (y viceversa). Podría pensarse que, puesto que $\grave{\varepsilon}X(\varepsilon)$ es

13 Como tampoco lo es decir que a dos conceptos equinuméricos les corresponde el mismo número.

una función, si F y G han sido previamente identificados, no les puede asignar diferentes objetos, pero no es necesario considerarlo así. Siendo estrictos, no tiene sentido decir que los conceptos son idénticos o diferentes, lo relevante es lo que ocurre con sus extensiones.

¿El concepto *caballo* es una extensión?

Una vez visto cómo Frege introduce la noción de extensión de concepto, revisemos muy brevemente algunos de los argumentos dados para decir que el término 'el concepto caballo' es un nombre propio de la extensión del concepto caballo. Suscribiremos esta conclusión, pero sostendremos que no resuelve el problema sobre la referencia de 'el concepto caballo'.

El primero es cierta evidencia textual de que Frege así lo entiende. Por ejemplo, en "Sobre concepto y objeto", donde Frege responde a Kerry, se encuentra una observación crucial para nuestro tema. Después de insistir en que el concepto tiene naturaleza predicativa y no puede, por tanto, ser nombrado por un sujeto gramatical, agrega que para decir algo de un concepto: "debe primero ser convertido en un objeto o, más precisamente, un objeto debe ponerse en su lugar" (Frege, 1892: 186). Advirtamos la semejanza con la formulación dada en *Grundlagen* acerca de cómo un concepto puede hacerse un objeto, lo que apuntaría a que podría haber tenido la idea de *representación* en 1884. Por lo que hemos visto, sería natural pensar que se refiere a la extensión del concepto en el sentido técnico que le ha dado a la palabra. A continuación, agrega: "designamos este objeto prefijando las palabras 'el concepto'" (Frege, 1892: 186). Esto lo ilustra con la oración 'el concepto hombre no es vacío'. Esta vez 'el concepto hombre' no alude a aquello de lo que queríamos hablar (sin conseguirlo), sino que se refiere a un objeto que está por el concepto. En los *Grundgesetze*, Frege utilizará constantemente el recurso de reducir una predicación de segundo orden a una de primero. Un concepto de segundo orden F^2 puede ser representado por uno de primer orden F^1 definido así: x cae bajo F^1 si y sólo si x es la extensión de un concepto G que cae bajo F^2. Para ello se requiere que las extensiones cumplan ciertas condiciones, en particular, las condiciones de identidad con que fueron introducidas. Como veremos, Frege hará algo similar con las funciones de primer orden con dos argumentos. La representación que ofrecen las extensiones de concepto de los respectivos conceptos permite estas otras dos reducciones o representaciones. Sin embargo, la evidencia textual debe manejarse con cuidado, porque a veces Frege utiliza expresiones del tipo "el concepto F", para referirse a aquello que la expresión no puede designar, pero sugiere.

Un segundo argumento, dado por de Rouilhan (1988: 107), es que Frege explícitamente asevera que en la definición de 'número' pudo haber substituido 'la extensión del concepto' por 'el concepto'. La única forma de explicar esa aparente arbitrariedad es que las dos expresiones signifiquen lo mismo. Ahora bien, ¿se requiere para ello que tengan el mismo sentido o sólo la misma referencia? Ambas respuestas tienen alguna evidencia en su favor, aunque nos inclinamos por la primera. Así también quedaría explicada, como asevera Marco Ruffino (2000), la respuesta a Kerry. Esto supone que Frege ya tenía la idea de la representación desde los *Grundlagen*. Por el breve recorrido que hicimos de su obra en esos años, esta hipótesis es verosímil.

Un tercer argumento es presentado por Tyler Burge (1984). En la tradición lógica era común pensar al concepto de manera dual: por un lado, como una intensión determinada por una serie de propiedades que conjuntas producen un criterio de subsunción; por otro, como su extensión, es decir, como la pluralidad de objetos que caen bajo él. Frege tenía una noción novedosa de lo que es un concepto por el simple hecho de que no lo sitúa a nivel del sentido, sino de la referencia. Además, lo considera un tipo particular de función, para lo cual, además, es necesario concebir los valores de verdad como objetos. Tampoco comparte con los lógicos de su tiempo qué es la extensión de un concepto. Para él no es la referencia del término conceptual. A pesar de todas estas diferencias, como argumenta Burge, es muy posible que Frege haya retenido algo de este carácter dual del concepto, lo cual explicaría la "ambigüedad" en el término 'el concepto caballo'. Mejor dicho, la expresión no es ambigua, sino engañosa: tiene como referencia un objeto (que todavía no vemos con claridad), pero parece designar otra entidad.

Sin embargo, estos argumentos, y otros similares, sólo muestran de manera muy convincente, que Frege empleó 'el concepto F' para denotar la extensión del concepto F, pero no, desde luego, que eso sea el significado de la expresión. Ahora bien, si esa tesis es correcta, entonces podemos expresar formalmente tanto lo que ese tipo de expresiones sugieren como también aquello a lo que se refieren. No hay problema para hablar de funciones ni de sus rangos de valores en lenguaje formal. Si disponemos de un término conceptual F, podemos atribuirle propiedades mediante predicaciones de orden superior y hablar de su extensión por medio del término ‘`f(ε)’. La cuestión es más bien cuál es el sentido de la expresión ‘el concepto caballo’ y si, analizándolo, pudiésemos tener alguna elucidación acerca de su referencia. ¿Podemos encontrar apoyo en la tesis susodicha por medio del análisis del término? Tal vez encontrar un equivalente formal razonable pudiese ayudarnos. Ahora bien, si pensamos que ‘el concepto caballo’ es una suerte de descripción definida, entonces tendríamos que buscar su referente entre los conceptos, donde nunca lo hallaríamos. Es como si dijéramos ‘el volcán Pico Cristóbal Colón’. Ese término carece de referente, pues la montaña así nombrada no es un volcán.

Podríamos formular en el lenguaje de la segunda conceptografía una expresión que imitara sintácticamente la estructura de ‘el concepto caballo’, pero presuponiendo justo lo que queremos demostrar. El artificio que corresponde formalmente al artículo definido en el lenguaje formal de los *Grundgesetze* es un término funcional de primer orden. Su referencia es una función que al aplicarse a un argumento genera este mismo argumento, excepto cuando se trate de la extensión de un concepto que subsume un sólo objeto, en cuyo caso su valor es este objeto. Si ‘C(x)’ simboliza ‘ser un caballo’ y ‘f’ al caballo Fred, podríamos formalizar ‘el caballo Fred’ aplicando el símbolo del artículo definido a la expresión ‘(x=f)&(x pertenece a ε`C(ε))’. Por supuesto, no ganamos poder expresivo, porque Fred ya tenía su nombre y el resto del artificio resultó redundante. Esto sería aun más redundante e inútil en el caso del concepto caballo, porque ‘ser un concepto de primer orden’ es un término funcional de segundo orden (el cual tendríamos primero que representar en primer orden) y el concepto caballo (nos referimos aquí a lo que esta expresión sugiere) tendría que representarse por su extensión, con lo cual estaríamos concediendo la tesis que pretendíamos poner a prueba. En conclusión, no podemos descomponer el término ‘el concepto caballo’ para determinar su referencia a través de su sentido. Los argumentos que hemos revisado de diversos comentaristas muestran, a nuestro juicio con bastante fundamento, que Frege usó el término “el concepto caballo” para referirse a la extensión del concepto aludido, no que esta sea realmente la referencia que el sentido de dicho término tiene. En lo siguiente mostraremos que, aun si ‘el concepto caballo’ se refiere a la extensión del concepto caballo, no hemos contestado a la pregunta del título de este artículo. En ello disentimos de los autores mencionados.

¿Qué es la extensión del concepto caballo?

Contrario a la nota 88 de *Grundlagen*, sabemos poco de lo que es la extensión de un concepto. Muchos lectores de Frege la han identificado con el conjunto de objetos que subsume. A ello se objetaría que Frege define los números como extensiones de concepto, a la vez que, en *Grundlagen*, critica a quienes los han definido recurriendo a la noción de conjunto o sistema. Sin embargo, la lectura de esos pasajes y de otros similares revela que utiliza estas palabras de un modo muy particular. En una carta a Russell, fechada el 28 de julio de 1902, dice:

> […] tu escribes: 'El número cardinal de una clase *u* sería la clase de las clases similares a *u*'. Esto está perfectamente de acuerdo con mi definición. Pero no debemos considerar a las clases como sistemas, pues el detentor de un número, como lo he mostrado en mis *Fundamentos de la Aritmética* no es un sistema, un agregado, un todo consistente de partes, sino un concepto por el cual podemos substituir la extensión de un concepto. (Frege, 1980: 141)

Es decir, Frege rechaza la definición de números en términos clases, entendidas estas como totalidades consistiendo de partes. Otros pasajes refuerzan la identificación de conjuntos y extensiones de concepto:

> […] pues uno puede considerar que lo que los matemáticos llaman un conjunto, etc., no es realmente más que la extensión de un concepto, aún si ellos no siempre son conscientes de ello. (Frege, 1903: 148, § 147)

Allí agrega que la conversión de la generalidad de una igualdad en una igualdad (como la prescrita por la Ley V) ha sido común en matemáticas y en lógica. En otros párrafos, Frege intercambia 'extensión de concepto' por 'conjunto' o 'clase', por ejemplo, cuando habla de la paradoja de Russell. En cierto sentido, las extensiones de concepto son conjuntos, pero en otro, muy importante, no lo son. En 1903, la noción de "conjunto" no está claramente definida y aún falta mucho para que se consolide la concepción iterativa surgida con las axiomatizaciones de Ernst Zermelo y sus sucesores. Frege no sólo tiene reparos a una noción vaga de "sistema" o conjunto, sino también a una concepción de conjunto "arbitrario", según la cual cualquier pluralidad de objetos constituye un conjunto. Para él, el concepto es lógicamente anterior a su extensión. Podemos hablar de clases, como acepta Frege, siempre y cuando sus elementos estén reunidos por el poder unificador de un concepto (1884: § 48). No hay tal cosa como clases arbitrarias, todas son relativas a un concepto. Podríamos pensar que Frege estaría contra la concepción iterativa de conjunto, pero aceptaría que las extensiones son conjuntos de la llamada teoría *naïve* de conjuntos. Contaría a favor de ello la siguiente observación: para Frege el término conceptual se forma por la substitución en un enunciado de un término singular (en todas sus figuraciones) por una variable. Una ley implícita en la *Conceptografía* y explícita en *Grundgesetze* permite que la referencia de este término entre en el dominio de variación de cualquier cuantificador de segundo orden. La Ley V posibilita introducir un objeto por cada término conceptual y los objetos así formados, es decir, las extensiones de concepto, obedecen al ya mencionado criterio de identidad: dos conceptos son coextensionales si y sólo si les corresponde la misma extensión de concepto. Frege define una relación binaria $\cap$ que aplicada a un objeto O y al rango de valores R de una función f(x) arroja f(O). En particular, si f(x) es un concepto, entonces $\cap$ aplicada a O y a $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$ es lo verdadero si O cae bajo f (o, si O pertenece a $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$). Es decir, tenemos todos los elementos de la mencionada teoría *naïve* de conjuntos, incluida la paradoja de Russell. ¿No deberíamos decir que ya sabemos qué son las extensiones de concepto? En la siguiente sección daremos los elementos para sustentar una respuesta negativa.

Las extensiones de conceptos no son conjuntos

Ahora presentaremos algunos argumentos para mostrar que, en otro sentido, más relevante a nuestro tema, las extensiones de concepto no son conjuntos. El primero se encuentra en Gregory Landini (2012: 92). Actualmente es común considerar que una función es un tipo particular de relación y que las relaciones son conjuntos de pares ordenados, los cuales, a su vez, son definidos como conjuntos de cierta especie. En la lógica tradicional solía considerarse, como señala Burge (1984), que los conceptos tenían una naturaleza dual: intensional y extensional. Los conceptos en extensión podrían ser considerados como conjuntos o sistemas. Eso parece compaginar con la idea de que el concepto tendría asociado un objeto, es decir, el conjunto en cuestión. Sin embargo, esa idea no sería aplicable a funciones. La noción de función se había desarrollado y ampliado en el seno de las matemáticas, pero aún era vaga. Frege la precisa, la transforma en una noción lógica y concibe al concepto como un caso particular de función. Sin embargo, no sólo el concepto tiene asociado un objeto, sino que eso también se extiende a toda función de primer orden de un argumento. Que cada una de estas funciones tiene su curso de valores es una ley lógica.

Esta representación de funciones por objetos es fundamental en el sistema de *Grundgesetze*. Ella permite, como vimos, expresar que un objeto es "elemento" de una extensión de concepto, o representar una función de primer orden con dos argumentos, por medio del curso de valores de una función que a cada objeto asocia el curso de valores de otra función de primer orden con un argumento. Más precisamente dada la función f(x,y), fijemos la segunda coordenada saturando su segundo lugar de argumento con un objeto b. Obtenemos una función de primer orden y de un argumento f(x,b). Asociemos a b el curso de valores de esa función. Así por cada objeto b obtenemos otro, el curso de valores ε`f(ε,b). Tomemos ahora el rango de valores de esa función (que no tiene por qué ser un concepto, aun si f(x,y) hubiese sido una relación), el cual se llamará "el doble rango de valores" de la función original y será su representante. Como vimos, la representación de las funciones de primer orden (con un argumento) por sus rangos de valores permite otro tipo de representaciones (por ejemplo, reducciones de orden en la predicación). Así, toda función de este tipo requiere un rango de valores, no sólo los conceptos. Podría objetarse que eso es compatible con que los rangos de valores de los conceptos sean conjuntos. Sin embargo, el argumento de Landini muestra que Frege usa el término "extensión" de una manera inusual. Los siguientes argumentos reforzarán esta impresión.

Otra razón para sostener que las extensiones de concepto no son conjuntos proviene de la muy discutida sección 10 de *Grundgesetze*. Allí Frege observa que si una función E de segundo orden satisface la Ley V —si [E_x(F(x))= E_x(G(x))=[para todo x(F(x)=G(x))]— y si Z(x) es una función de primer orden inyectiva (o una permutación), entonces Z(Ex) también satisface la Ley V, es decir, que esta no fija qué función de segundo orden asocia a cada función de primer orden su curso de valores. Frege se pregunta cómo debe resolverse esta indeterminación y responde: "determinando para cada función, al momento de introducirla qué valores recibe para los rangos de valores como argumento, al igual que para todos los demás argumentos" (1893-1903: §§ 10, 16). Para resolver esta cuestión provisionalmente, es decir, para las funciones hasta entonces introducidas (las cuales son conceptos), Frege muestra que basta determinar el valor de verdad de una identidad en uno de cuyos flancos aparece un rango de valores. Si de cada lado del signo de identidad figura el nombre de un rango de valores, la Ley V brinda la solución. La otra posibilidad, dados los objetos hasta ahora introducidos, es que de un lado haya el nombre de un valor de verdad. Otro argumento muestra que podemos elegir una de esas permutaciones, sin infringir la Ley V, de tal manera que los valores de verdad sean extensiones de conceptos. Frege elige, respectivamente, el Verdadero y el Falso como las extensiones de los conceptos nombrados por 'x es idéntico a Verdadero' y 'x es idéntico a Falso'. Más adelante probará que el Verdadero y el Falso son objetos diferentes y así la cuestión queda resuelta por el momento.

Nuevas precauciones tendrán que tomarse al introducir otras funciones y determinar qué valores de verdad tendrán los enunciados resultantes cuando los rangos de valores ya tratados ocupen lugares de argumento de las nuevas funciones. Estas secciones de *Grundgesetze* han sido objeto de amplios comentarios dando pie a enconadas discusiones. Puede decirse que, en la versión que toma las extensiones como conjuntos, se determina que no habrá *urelementos*. En cambio, nosotros sacamos la conclusión de que las extensiones de concepto no son conjuntos. Aunque Frege ha decidido que el Verdadero y el Falso serán extensiones de ciertos conceptos, estrictamente hablando nada impide otra elección que haría de un objeto cualquiera la extensión de un concepto dado. [14] Por otro lado, aun en una versión intuitiva, un conjunto está completamente determinado por sus elementos (según el axioma de extensionalidad). Si su conjunto potencia existe, si una clase que se contiene a sí misma es un conjunto, o con qué operaciones podrán formarse otros conjuntos, etcétera, son cuestiones que dependerán de la teoría de conjuntos que adoptemos, pero el conjunto está determinado por sus elementos. En cambio, la extensión de un concepto particular no está determinada por la Ley V. Es un objeto y deseamos saber cuál es.[15]

Landini provee un tercer argumento aún más convincente. Para derivar la paradoja de Russell se requieren ciertos presupuestos, en particular, que toda fórmula con una variable libre denote un concepto, que cada concepto tenga

14 Ha sido muy debatido si Frege piensa que la solución al problema de la indeterminación de la cita anterior debe hacerse para cada objeto del "dominio de variación de las variables" o sólo para los que tienen un nombre.

15 Tanto Landini (2012) como Joan Weiner (2019) piensan que este es un falso problema.

asociada una extensión y que si las extensiones de dos conceptos F(x) y G(x) son iguales, entonces susbsuman exactamente los mismos objetos. La paradoja requería modificar alguno de ellos. Frege eligió el último reemplazándolo por el siguiente principio: dos conceptos F y G tienen la misma extensión si y sólo si cada objeto, distinto de la extensión de F y de la extensión de G, que cae bajo F cae bajo G, y viceversa. A lo cual comenta: "Con esto, sin embargo, queda abolida la extensión de un concepto en el sentido tradicional de la frase" (1893-1903: 260). Es decir, Frege no da excesiva importancia a los criterios de extensionalidad provistos por la Ley V (más allá de ciertos límites esperados) y, en cambio, retiene la idea de que cada función debe tener su representante objetual. Ahora bien, el criterio de extensionalidad es una de las más importantes características de los conjuntos. A este argumento podría objetarse de inmediato que la solución a la paradoja es un intento desesperado de eliminarla que no refleja necesariamente la concepción original de lo que es la extensión de un concepto. Pero, la cita anterior parece sugerir que Frege elimina un elemento no esencial aunque, por supuesto, ignora si su nueva propuesta conlleva algún riesgo. Es decir, la emergencia de la paradoja lo lleva a revelar cuál es el núcleo de su concepción. Exploremos este último argumento con detenimiento.

Nos preguntábamos si las extensiones de conceptos podrían ser consideradas como conjuntos. Vimos algunas razones para una respuesta afirmativa y tres argumentos para negarlo o, al menos, para matizar esa afirmación. Pero, para nuestra discusión, pesa más la parte negativa, pues, como dijimos, un conjunto está determinado por sus elementos. Una vez que estos son reunidos, sea por alguna propiedad compartida sólo por ellos o por alguna otra razón, cualquier otra cuestión sobre su identidad es incomprensible. Observemos que la extensión de un concepto se introduce como el resultado de una transformación del mismo para "convertirlo" en un objeto que lo representa. Parecería algo muy bien determinado, si el concepto está bien definido (y, de lo contrario, no es un concepto, según Frege). En los párrafos iniciales de *Grundgesetze*, se puede elegir libremente a los representantes de las funciones (y de los conceptos) siempre y cuando a cualesquiera dos conceptos les corresponda el mismo objeto si y sólo si son co-extensionales. Ahora, en el apéndice, Frege admite que el criterio de identidad de esos representantes pudo ser distinto. A esto puede objetarse que los conceptos ordinarios, cuyo criterio de subsunción no contempla todos los objetos, son redefinidos al interior del sistema de manera artificial y más o menos arbitraria para completarlos. Por ejemplo, de acuerdo con Frege, debemos decidir el valor de la función denotada por ‘x+2’ cuando el lugar del argumento lo ocupa el sol, para saber si el sol entra en el concepto denotado por ‘ser mayor que 7 cuando sumado con 2’, de tal manera que no se produzcan enunciados sin valor de verdad. Así el concepto denotado por ‘*ser mayor que 7 cuando sumado con 2*’ tiene un valor para cada argumento, y no sólo para números. Pero, por supuesto, cuando se trata del 4, y no del sol, no hay lugar para la arbitrariedad. Podría pensarse que el caso de los rangos de valores es similar. Hay un rango de indeterminación. Sin embargo, ahora la separación entre los casos normales y los arbitrarios no es tan sencilla. Para verlo, consideremos una de las implicaciones de la solución que Frege (Frege’s way out) da a la paradoja de Russell.

Si admitimos la solución de Frege, algunas modificaciones tendrían que hacerse en el resto del sistema. Por ejemplo, si F y G subsumieran exactamente los mismos objetos “ordinarios”, pero sólo F subsumiera tanto la extensión de F como la de G, entonces F y G no podrían ser puestos en correspondencia biunívoca y no les correspondería el mismo número. Sin embargo, sus extensiones serían idénticas. Evidentemente habría que excluir este caso en la definición de equivalencia numérica. Diríamos, por ejemplo, que F y G son equinuméricos si a cada objeto distinto de las extensiones de F y G que cae bajo F corresponde un objeto y sólo uno que cae bajo G y que es distinto de las extensiones de F y de G; y que lo mismo ocurre con G. Sin embargo, ello supondría que somos capaces de identificar cuáles objetos deben ser identificados con dichas extensiones. Si César cae bajo uno de los conceptos y no bajo el otro, ¿deberemos tomar este caso como relevante? Otra manera de formular el problema es el siguiente. El concepto denotado por ‘ser mayor que 7 cuando sumado con 2’ está mal definido, así se deben hacer algunas convenciones, tan arbitrarias como inocuas, para determinar si el sol cae bajo él. De manera similar, además de lo que establece la Ley V, debemos hacer algunas convenciones para determinar el concepto “ser la extensión de un concepto de primer orden”. Frege decide que el Verdadero y el Falso caen bajo él y elige de qué conceptos son los representantes. Pero ahora afrontamos un problema más agudo que en el caso del concepto “caballo”. Allí los casos ordinarios estaban claros: Fred es distinto que Rut y ambos son caballos. En el caso del concepto “ser la extensión de un concepto de primer orden” tenemos algunas dificultades con los objetos mismos que supuestamente subsume. No sólo los bordes de los conceptos ordinarios tienen que ser decididos con relativa arbitrariedad, sino también es necesario determinar cómo se comportan sus extensiones respectivas al entrar como argumentos de las funciones hasta allí introducidas, es decir, no están completamente determinadas. No sólo el concepto tiene bordes aún indecisos, sino también los objetos que subsume.

Muchos autores consideran esto como un resurgimiento del problema de Julio César, con lo cual estamos de acuerdo. Dicho problema apareció inicialmente en los *Grundlagen* a propósito de los primeros intentos, insatisfactorios, de definir 'el número que corresponde al concepto F'. Se objetaba que la definición en cada caso no permitía determinar si César era un número, o no, es decir, los números no habían sido definidos como objetos propiamente dichos. Frege tomaba como ejemplo la relación de paralelismo que podemos captar visualmente para formar a partir de esta relación de equivalencia un nuevo tipo de objetos (las direcciones de las líneas), recurriendo a la noción, supuestamente conocida, de extensión de un concepto. Si a y b representan líneas y bRc que son paralelas, la dirección de c será la extensión del concepto [xI xRc]. Frege recomienda esta forma de definir para la introducción de números, no sólo de los naturales, lo cual depende, en última instancia, de que las extensiones de concepto estén bien definidas. Sin embargo, como hemos visto, sólo son introducidas por una relación de equivalencia y por convenciones que se decidirán conforme nuevos objetos y funciones aparezcan.

Para algunos intérpretes, este es un falso problema y Frege no tenía que enfrentarlo en el marco de su filosofía. Refiriéndose al problema de la indeterminación en el caso particular de los números (tal y como lo plantea Paul Benacerraf), Landini (2012: 106-107) dice que para resolverlo Frege sólo debía mostrar que a lo más una función de correlación (de las muchas que hay entre funciones y objetos, de acuerdo al argumento de la sección 10)[16] puede capturar la noción de cardinalidad y dar

> […] un argumento convincente de que en verdad el concepto de segundo nivel de equinumerosidad tiene un correlato como un concepto de primer nivel que se mantiene entre objetos. Los argumentos para lo último son los argumentos de Frege de que los números naturales son objetos. (Landini, 2012: 107)

16 En la sección 10, de *Grundgesetz*e, Frege prueba que muchas funciones de segundo orden son compatibles con la Ley V.

Si entendemos bien, la idea es: si los números son objetos, debe haber una función de correlación que asocie el objeto correcto a la relación de equinumerosidad con un concepto dado. Por ello, la pregunta de cuál sería precisamente el objeto que representa tal o cual concepto no tendría mucha relevancia. Debe haber uno, aunque no sepamos exactamente cuál. Pero tal repuesta no concuerda por completo con la forma en que en *Grundgesetze* son determinadas las extensiones de concepto en sucesivas aproximaciones. Joan Weiner (2019) argumenta que las cuestiones acerca de cuál es la referencia de un nombre N no se responden en el marco fregeano señalando un objeto que sea su denotación, sino determinando el valor de verdad de enunciados en que N figura. Sus argumentos en defensa de esta interpretación son muy interesantes y tal vez acertados. Si estuviese en lo correcto, sabríamos que Frege respondió coherentemente a la pregunta acerca de la naturaleza de los objetos denotados por 'el concepto F' o 'la extensión del concepto F' para los conceptos introducidos en su obra principal, pero no contestó a nuestra pregunta general respecto de la naturaleza de dichas entidades.

En conclusión, cuando decimos que con 'el concepto caballo' Frege se refería a la extensión del concepto caballo, no hemos contestado satisfactoriamente la pregunta que da título a este ensayo.

Bibliografía

Burge, Tyler (1984), "Frege on extensions of concepts, from 1884 to 1903", *The Philosophical Review*, vol. 93, núm. 1, enero, pp. 3-34.

Frege, Gottlob (2013), *Basic Laws of Arithmetic*, Oxford, Oxford University Press.

Frege, Gottlob (1984), *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Oxford, Blackwell Press.

Frege, Gottlob (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Chicago, The University of Chicago Press.

Frege, Gottlob (1979), *Posthumous Writings*, Chicago, The University of Chicago Press.

Frege, Gottlob (1893-1903), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena, Herman Pole, 2 vols.

Frege, Gottlob (1892-1895), "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", en Gottlob Frege (1979), *Posthumous Writings*, Chicago, The University of Chicago Press, pp. 118-125.

Frege, Gottlob (1892), "On concept and object", en Gottlob Frege (1984), *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Oxford, Blackwell Press, pp. 182-192.

Frege, Gottlob (1891), "Function and concept", en Gottlob Frege (1984), *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Oxford, Blackwell Press, pp. 137-156.

Frege, Gottlob (1885a), "Über das Trägheitsgesetz", en Gottlob Frege (1984), *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Oxford, Blackwell Press, pp. 123-137.

Frege, Gottlob (1885b) "Ueber formale Theorien der Arithmetik", en Gottlob Frege (1984), *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Oxford, Blackwell Press, pp. 112-121.

Frege, Gottlob (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslavia, W. Koebner. [Edición en español: (1972), *Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios Filosóficos*, México, Universidad Nacional Autónoma de México.]

Frege, Gottlob (1882), "Boole's logical Formula-language and my Concept-script", en Gottlob Frege (1979), *Posthumous Writings*, Chicago, The University of Chicago Press, pp. 47-52.

Frege, Gottlob (1881), "Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift", en Gottlob Frege (1979), *Posthumous Writings*, Chicago, The University of Chicago Press, pp. 9-46.

Frege, Gottlob (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, Verlag von Louis Nebert. [Edición en español: (1972), *Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios Filosóficos*, México, Universidad Nacional Autónoma de México.]

Heck, Richard (2012), *Reading Frege's Grundgesetze*, Oxford, Oxford University Press.

Landini, Gregory (2012), *Frege's Notations. What They Are and How They Mean*, Londres, Palgrave-Macmillan.

Proietti, Carlo (2010), "The Kerry-Frege debate about object and concept, some remarks on Kerry's position", *Analitica*, vol. 3, pp. 96-104.

Proops, Ian (2013), "What is Frege's 'concept horse problem'?", en Michael Potter y Peter Sullivan (eds.), *Wittgenstein's Tractatus: History and Interpretation*, Oxford, Oxford University Press, pp. 76-96.

Rouilhan, Philippe de (1988), *Frege. Les paradoxes de la représentation*, París, Les Éditions de Minuit.

Ruffino, Marco (2000), "Extensions as representative objects in Frege's logic", *Erkenntnis*, núm. 52, pp. 239-252.

Russell, Bertrand (1996 [c. 1903]), *The Principles of Mathematics*, Nueva York/Londres, W. W. Norton & Company.

Weiner, Joan (2019), "Why does Frege care whether Julius Caesar is a number? Section 10 of *Basic Laws* and the context principle", en Philip Ebert y Marcus Rossberg (eds.), *Essays on Frege's Basic Laws of Arithmetic*, Oxford, Oxford University Press, pp. 115-141.

Max Fernández de Castro: doctor en filosofía por la Universidad de París I. Profesor-investigador del Departamento de Filosofía, de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa (UAMI). Autor de *Quine y la Ontología Abstracta* (México, UAMI/Porrúa, 2003), co-autor de cuatro libros de lógica y de un libro de filosofía del lenguaje. Ha escrito artículos sobre filosofía de las matemáticas y de la lógica.

Rosa María Espinoza Coronel: estudió la licenciatura en Filosofía la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa. Terminó la maestría en Filosofía en el Posgrado en Filosofía de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional Autónoma de México con la tesis *De lo inefable en Frege y en el primer Russell*. Ganó el premio anual de ensayo organizado por la SWIP-Analytic México en 2015 con el trabajo: "Russell y la Elegía de Gray". Actualmente terminado su doctorado en Posgrado en Filosofía de la Ciencia de la UNAM.