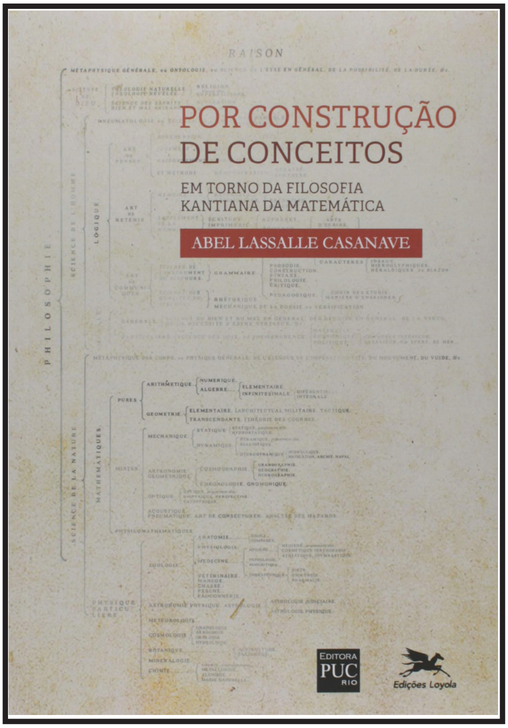
Signos Filosóficos, vol. XXIII, no. 45, January-June, 2021, 180-187

Lassalle Casanave Abel (2019), *Por construção de conceitos: em torno da filosofia kantiana da matemática*, Río de Janeiro, PUC-Rio/Edições Loyola Jesuítas, 208 pp.

Con pocas excepciones, los filósofos han considerado a la matemática como una ciencia *a priori*. Kant pensó que también sus proposiciones son sintéticas, es decir, que no son el simple resultado de un análisis conceptual. Una intuición pura establece un puente que conecta el predicado con el sujeto de la proposición sintética *a priori*. ¿Cómo es esto posible? En el caso de la matemática es porque puede proveer para cada uno de sus conceptos (cuyas notas no sean contradictorias) una intuición que este subsume. A eso llama "construcción del concepto" en cuestión. El análisis del concepto de triángulo no permite concluir que sus ángulos internos miden 180 grados. El matemático traza un triángulo concreto, agrega líneas auxiliares y puede, con ello, derivar esa propiedad. ¿El triángulo dibujado es el objeto intuido? ¿Un elemento particular permite derivar una conclusión general? ¿Qué pasa con la aritmética? ¿En la manipulación algebraica hay algún expediente semejante? ¿Qué es precisamente la construcción de un concepto matemático? El excelente libro de Abel Lassalle Casanave se enfoca en esclarecer esta cuestión. Su tesis principal es anunciada al principio de manera un tanto críptica, a saber, construir un concepto matemático es resolver un problema. Es una interpretación novedosa, pero al principio enigmática. Seis capítulos le dan un contenido muy concreto, la justifican y argumentan contra interpretaciones rivales.

Antes de resumir el contenido del libro, agrego que la obra cae en la tradición llamada filosofía de la práctica matemática la cual, para decirlo en palabras del propio autor, oscila entre la Escila del análisis lógico y la Caribdis de la historia de las matemáticas. En efecto, los argumentos toman muy en consideración no solo



la matemática que Kant conocía y la especulación filosófica de su tiempo respecto a esta disciplina, sino también su desarrollo posterior.

El libro comienza exponiendo cuál era el contexto en que se daba la reflexión filosófica en torno a las matemáticas en los siglos XVII y XVIII. La matemática era considerada como ciencia de las cantidades (sea extensas o numerables) y, a la tradicional división entre geometría y aritmética, se agregaba la irrupción del álgebra y de los métodos infinitesimales. Sin embargo, los debates filosóficos se inscribían aún bajo la influencia del marco aristotélico y las exigencias que este impone a la ciencia. Se ha solido pensar que *Los Elementos* de Euclides están estructurados de acuerdo con este ideal o, por lo menos, intentan ejemplificarlo, aunque no hay de ello ninguna evidencia histórica. Con algunos ejemplos de este texto, Lassalle Casanave muestra que existen diferencias importantes entre la concepción del estagirita y la práctica del alejandrino. Sin embargo, las demostraciones euclidianas pueden ser reformuladas, no sin cierta violencia, a la manera silogística. El libro provee evidencias que esta fue una práctica común en los siglos XVII y XVIII, no ignorada por Kant, y que dio pie a la discusión de si las demostraciones matemáticas eran realmente científicas en el sentido de *Los Segundos Analíticos*. Este es un aspecto importante y constituye una pieza de evidencia del autor contra ciertas interpretaciones según las cuales la tesis kantiana de que la matemática es sintética estaba motivada por la ausencia de una lógica adecuada para conectar conceptos y formar así juicios analíticos o de la falta de un lenguaje apropiado para expresar proposiciones matemáticas. Aparece allí brevemente la cuestión, muy debatida en la actualidad, sobre la dispensabilidad y legitimidad de los diagramas en la geometría euclidiana. En lo referente a Kant, el tema reaparece más adelante.

El segundo capítulo, así como el cuarto, presenta digresiones necesarias. En él se ilustra, con el ejemplo paradigmático de *La Geometría* de Descartes, la irrupción del álgebra y su aplicación a la geometría. Lo más importante para lo que vendrá después son las construcciones originales con que Descartes realiza operaciones *aritméticas* con segmentos de línea. Con ello las operaciones sintácticas con ecuaciones tiene un correlato geométrico. Con erudición, el autor revisa las diversas formas en que fue nombrada y concebida el álgebra, entre otros por los enciclopedistas franceses, y las cuestiones a que dio lugar sobre su objeto y naturaleza y, principalmente, sobre la legitimidad de sus métodos. La última sección está dedicada a cómo Leibniz concibió este conocimiento *ciego*, es decir, un conocimiento que se obtiene en parte por la mera manipulación simbólica. La posición de Kant sobre este tópico varió del periodo pre-crítico a su pensamiento maduro. El objetivo de esta digresión es precisamente preparar el terreno para explicar en el último capítulo cómo entendía Kant la construcción simbólica, propia del álgebra.

El tercer capítulo presenta y explica los conceptos centrales de la epistemología kantiana y, muy especialmente, los relacionados con el método matemático. La forma en que Kant y algunos otros pensadores de la época entienden lo que son las definiciones y los axiomas matemáticos es muy relevante para sustentar la tesis central del libro. Es una preparación para los capítulos finales. Creo que, por mor de concisión, no hay una explicación de algunas tesis de Kant que vinculan su filosofía de las matemáticas con el resto de su pensamiento.

El capítulo cuarto está dedicado a exponer las diferencias entre el método axiomático antiguo y el moderno, ejemplificado este por *Los Fundamentos de la Geometría* de Hilbert. En esta obra, en marcado contraste con la euclidiana, no hay tal cosa como problemas y las definiciones son meras abreviaciones. Además los diagramas no tienen ningún papel en las demostraciones, sino que son meros expedientes que facilitan la lectura. Por último, la teoría no provee sus propios objetos, es decir, la referencia de los términos no lógicos no está fija. La importancia de este punto radica en que una teoría en este sentido moderno no puede construir sus conceptos, porque no tiene un material fijado de antemano. La geometría al estilo de Hilbert no necesariamente trata de líneas, rectas y puntos en el sentido ordinario de las palabras, sino de cualquier sistema con una determinada estructura. ¿Por qué requerimos conocer algunos elementos de la práctica matemática del siglo XX para leer a Kant? Para evitar el riesgo, al que estamos naturalmente expuestos, de proyectar el presente sobre el pasado.

El capítulo quinto es una continuación del tercero. Está consagrado a revisar la concepción kantiana del método matemático, en lo concerniente a la geometría. Provee evidencia en favor de la tesis del autor y argumentos en contra de otras interpretaciones. Aunque es difícil describir su contenido trataré de exponer lo esencial enfocándome en dos aspectos. El primero es la dicotomía que se manifiesta en diversos pares de conceptos: analítico-sintético, definición nominal-definición real, axioma-postulado, teorema-problema, demostración-construcción. Es sólito desde la antigüedad dividir las proposiciones de *Los Elementos* de Euclides en teoremas y problemas. Estos últimos no enuncian una propiedad de uno o varios objetos, sino que piden o anuncian la construcción de una figura determinada por ciertas condiciones. Por ejemplo, la primera proposición pide construir un triángulo equilátero con un segmento de línea dado. En un texto de matemática contemporánea no hay nada similar. La prueba que da Euclides conduciría a la conclusión de que dicho triángulo existe. Sin embargo, esta dualidad de la matemática antigua subsiste en la dicotomía moderna entre pruebas constructivas y no constructivas, división que es relativa a cada domino particular. En las reconstrucciones silogísticas que Kant conoció estas proposiciones constructivas fueron transformadas en enunciados existenciales y sus demostraciones en pruebas de que una figura, construida según un algoritmo dado, efectivamente cumple las condiciones propuestas. En la interpretación de Lassalle Casanave es necesario retener la dualidad original y poner el énfasis en el aspecto práctico. Frente a la definición nominal que solo permite clasificar objetos, la definición real es genética, es decir, provee de un método para la construcción de la entidad definida, probando de paso la *realidad objetiva* del concepto en cuestión. Puesto que el conocimiento no se da para Kant más que por la debida conjunción de intuiciones y conceptos, no basta con que un concepto sea consistente para ser legítimo. Necesitamos construirlo, es decir, proveerlo de una intuición que le corresponda. La definición real de un concepto permite esta construcción y averiguar así cualidades esenciales de la figura resultante, mismas que luego aparecerán formuladas en los axiomas. Por ejemplo, la definición de 'círculo' como una figura que se obtiene tornando un segmento de recta alrededor de un punto fijo, es una definición real. En cambio, "figura todos de cuyos puntos equidistan de un punto fijo" es una definición nominal. En esta interpretación un postulado, por ejemplo, "trazar una recta desde un punto a otro", es una forma de construcción inmediata (en el sentido en que no se requiere de una prueba de la efectividad del algoritmo para generar el resultado esperado) y representa la solución de un problema. Otras construcciones, por ejemplo, la correspondiente a la primera proposición de *Los Elementos*, se apoyan en construcciones previas y se requiere de una demostración de que la figura así obtenida cumple las condiciones enunciadas, porque eso no es evidente como lo era en el caso de los postulados. De este modo, los axiomas estarían fundados en última instancia en postulados, las demostraciones en problemas, las definiciones nominales en definiciones reales. La síntesis *a priori* en matemáticas sería posible por la solución de problemas. Nótese que, desde esta perspectiva, una demostración matemática no es una cadena deductiva que sigue reglas fijas.

La evidencia en favor de la tesis se encuentra en citas de Kant y de autores que él pudo leer y que ponen énfasis en este carácter *práctico* de la matemática.

El otro aspecto al que aludí es el problema de cómo la intuición que resulta de la construcción de un concepto es su representante y, a la vez, un ejemplo particular del mismo. Como dije, una demostración euclidiana viene acompañada de una figura que se traza en el papel o en la imaginación. ¿Juega realmente un papel en la demostración? Si es así, ¿cómo una figura particular permite obtener una conclusión universal? La respuesta es que el algoritmo que se da para construir la figura es lo que prueba la realidad objetiva del concepto, mientras que la intuición resultante solo cuenta en tanto que es resultado de la regla. Aquí hubiese sido conveniente que el autor explicara con mayor detenimiento este punto, central en la filosofía de las matemáticas.

Una vez explicada la tesis central del libro, el capítulo se dirige contra otras interpretaciones que, o bien han prestado muy poca atención a la historia, o han creído ver en el pensamiento de Kant una anticipación de ideas aparecidas solo mucho más tarde. En el primer tipo caen las interpretaciones (como la de Jaakkoo Hintikka y Michael Friedman) que aluden a la pobreza de medios que limitaba el carácter de la lógica tradicional y que circunscribía indebidamente el conocimiento analítico, lo cual habría dado pie a que Kant atribuyera un carácter sintético a las proposiciones matemáticas. Como señala el autor, tal justificación es inaplicable a las reconstrucciones silogísticas que Kant conocía. La otra línea, que sigue, por ejemplo, Lisa Shabel, está inspirada en estudios y reconstrucciones modernas de Euclides (tal vez el más notable sea el de Ken Manders),[1] y pretende que Kant consideraba las demostraciones como siendo de naturaleza mixta, al incluir como parte esencial de las mismas la evidencia dada por el diagrama. El autor reconoce la importancia de estos estudios, pero descarta dicha interpretación por carecer de apoyo textual y por ser innecesarias frente a la que él presenta.

Aparece allí un tema importante para la filosofía de las matemáticas, a saber, el valor que tiene la reconstrucción de una teoría en otra. Como los ejemplos del capítulo muestran, hay muchos elementos a tomar en cuenta antes de sacar conclusiones filosóficas de tales empresas.

El último capítulo extiende la tesis a la aritmética y al álgebra (elemental). Me atendré solo a la segunda por concisión y porque constituye una importante contribución a la exégesis de Kant. Según interpretaciones clásicas, para Kant la construcción simbólica consistiría en la manipulación de símbolos algebraicos sin contrapartida ostensiva, en contraste con su filosofía de la geometría. En cambio, el autor defiende que para Kant, en el periodo de *La Crítica*, también la manipulación algebraica involucra construcciones, en el mismo sentido que en la geometría, sólo que de manera indirecta. Para hacer evidente este punto, es importante tener como trasfondo lo que antes expuso sobre *La Geometría* de Descartes. En esa obra las operaciones algebraicas tienen como contrapartida construcciones geométricas, y la manipulación simbólica desemboca en última instancia en la resolución de problemas geométricos. Por supuesto que esta explicación kantiana no sería aplicable a los métodos infinitesimales de la matemática de su tiempo.

Se ha considerado que el desarrollo ulterior de la ciencia y, en particular, de las matemáticas supuso un reto a la filosofía kantiana. El ejemplo obvio es el

1 Aunque Shabel no conocía el trabajo de Manders cuando escribió su libro.

surgimiento de las geometrías no-euclidianas y de la lógica moderna. En la lectura de Lassalle Casanave, la filosofía de la ciencia kantiana queda aún más circunscrita a su época. Los métodos infinitesimales o el álgebra abstracta de mediados del siglo XIX quedarían fuera de su ámbito de validez. Sin embargo, no debe olvidarse el hecho, no mencionado en el libro, de que todo el debate fundacionista de finales del siglo XIX y principios del XX se dio en torno a la filosofía kantiana. Esto no invalida la tesis del libro, porque la obra de un autor puede ir mucho más allá de lo que este efectivamente pensó.

Me parece importante señalar algo que no aparece en el libro, pero parecería importante para completar la perspectiva que presenta. Una pregunta surgida de su lectura es ¿por qué los métodos propios, por ejemplo, de la geometría euclidiana o de la cartesiana, serían legítimos como fuentes de conocimiento? Se trata de formas de construcción muy particulares. ¿Podrían otros métodos constructivos usados en matemáticas ser válidos en este sentido? En general, ¿cómo se vincula la tesis del libro con el resto de la filosofía kantiana? Uno de sus méritos, en lo relativo a las matemáticas, estaría en su intento de explicar cómo la matemática se aplica al mundo *exterior*. Este aspecto no es tocado por Lassalle Casanave. A cambio, el libro tiene una extensión muy razonable y explica con paciencia muchos elementos de la práctica matemática.

Desde luego hay mucho material interesante en el libro que no ha sido posible tratar aquí. Creo que ofrece una interpretación importante y bien fundamentada de la filosofía de las matemáticas de Kant que deberá ser tomada en cuenta por otros exégetas de su obra. Asimismo constituye una introducción a problemas importantes que la matemática presenta al pensamiento filosófico.

Max Fernández de Castro
orcid.org/0000-0003-0750-284X
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa
Departamento de Filosofía
xamf_mx@yahoo.com

Max Fernández de Castro: profesor-investigador de tiempo completo del Departamento de Filosofía de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa. Doctorado en Filosofía por la Universidad de París I-Sorbonne (año 2000). Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, nivel I. Se especializa en filosofía de las matemáticas y lógica epistémica.