Signos Filosóficos, vol. XXV, no. 48, July-December, 2022, 114-151

Tableaux for an alethic-epistemic logic and its conditional versions

Juan Carlos Sánchez Hernández
ORCID.ORG/0000-0001-9875-2005
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa
Maestría en Humanidades
shjc96@gmail.com

Abstract: *Although modal logic has significantly developed since the possible worlds semantics invention, today, it is recognized that a modal logic that uses only one type of modality is very restricted. In this article, I aim to provide the semantics and tableaux systems for some alethic-epistemic-doxastic logics. The basic system (T/T/KD*) is used to discuss the validity of some principles and some of Spinoza's ideas on modal thinking, for he believed that the possibility and contingency ideas are defects of our cognition. Next, the system's extensions based on are used to discuss the validity of the doxastic, epistemic, and alethic closure principles by means of the distinction between absolute and relative knowledge. Finally, the system is extended to develop a pair of conditional epistemic-doxastic logics to evaluate some skeptical statements.*

Keywords: actualism; knowledge analysis; contingency; skepticism; multimodal logic; Spinoza

Reception: 02/06/2021 **Acceptance:** 24/05/2022

Árboles semánticos para una lógica alético-epistémico-doxástica y sus versiones condicionales

Juan Carlos Sánchez Hernández
ORCID.ORG/0000-0001-9875-2005
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa
Maestría en Humanidades
shjc96@gmail.com

Resumen: Aunque la lógica modal ha tenido un desarrollo importante desde la invención de las semánticas de mundos posibles, hoy se reconoce que una lógica que usa sólo un tipo de modalidad es muy restringida. En este artículo, mi objetivo es proveer de semánticas y sistemas de árboles a algunas lógicas alético-epistémico-doxásticos. El sistema básico *(T/T/KD*)* se usa para discutir la validez de algunos principios lógicos y algunas ideas de Spinoza sobre el pensamiento modal, ya que para él las ideas de posibilidad y contingencia sólo son errores de nuestra cognición. Las extensiones del mismo sistema con base en sirven para discutir la validez de los principios de cerradura doxástico, epistémico y alético por medio de la distinción entre conocimiento absoluto y relativo. Finalmente, se desarrolla la extensión del sistema con semánticas condicionales para evaluar algunas afirmaciones escépticas.

Palabras clave: actualismo; análisis del conocimiento; contingencia; escepticismo; lógica multimodal; Spinoza

Recibido: 02/06/2021 **Aceptado:**24/05/2022

Desde la invención de semánticas de mundos posibles, la lógica modal ha encontrado campo de aplicación en el modelaje de distintos planteamientos, dando lugar a gran variedad de lógicas aléticas, epistémicas, temporales, deónticas, etcétera; sin embargo, también se ha reconocido que una lógica que sólo usa una o dos modalidades es muy restringida. Dana Scott decía:

> Aquí está lo que considero es uno de los grandes errores en todas las lógicas modales: la concentración en un sistema modal con sólo un operador modal. La única forma de obtener resultados significantemente filosóficos en la lógica deóntica o la lógica epistémica es combinar estos operadores con: operadores temporales (de otra forma, ¿cómo podrías formular los principios del cambio?), operadores lógicos (de otra forma, ¿cómo podrías comparar lo relativo con lo absoluto?), operadores para la necesidad *histórica* o *física* (de otra forma, ¿cómo podrías relacionar a un agente con su entorno?), y así sucesivamente. (1970:161; mi traducción)

Mi objetivo es proveer un sistema de árboles semánticos para algunas lógicas alético-epistémicas; ya en una ocasión desarrollé las semánticas y sistemas de árboles de algunas lógicas alético-temporales (*cfr*. Sánchez, 2022), aquí modifico la técnica empleada entonces. En el apartado 1, haré una revisión general sobre las lógicas modales normales y cómo se les puede interpretar. En el apartado 2, desarrollo el sistema axiomático para la lógica alético-epistémico-doxástica *T/T/KD**, sus semánticas y algunas cuestiones filosóficas sobre las mismas. En el apartado 3, desarrollo el sistema de árboles semánticos para *T/T/KD** y discuto la validez de algunos principios. En tanto que el lenguaje de *T/T/KD** contiene operadores modales, epistémicos y doxásticos, éste permite hablar tanto de nuestras actitudes epistémico-doxásticas sobre la lógica alética como de las condiciones aléticas de nuestros conocimientos y creencias. Como una muestra de lo primero, en el apartado 4 reviso algunas ideas de Baruj de Spinoza a la luz del nuevo aparato formal, para quien nuestras ideas sobre posibilidad y contingencia son meramente errores de nuestro conocimiento. Los apartados restantes muestran cómo nuestros conocimientos varían según nuestras circunstancias. En el apartado 5, discuto la validez de los principios de cerradura en sus versiones estrictas y reinvindico la afirmación de Fred Dretske de que los operadores epistémicos y doxásticos no son tan penetrantes como los aléticos. Finalmente, en el apartado 6, desarrollo las semánticas condicionales de un par de lógicas alético-epistémicas y cómo éstas pueden evaluar algunas afirmaciones escépticas.

Sobre las lógicas a fusionar

En aras de la simplicidad, supondré que el lector está familiarizado con las lógicas aléticas, epistémicas, doxásticas y temporales normales, las cuales difieren en sus lenguajes sólo por los operadores modales que consideran y en sus semánticas por los conjuntos en que se basan. Puesto en una tabla, consideramos lo siguiente:

Lenguaje	Operadores	Lectura	Modelo
$L_{\Box}$	$\Box p$	Es necesario que *p*	$\langle W, R, v\rangle$
	$\Diamond p$	Es posible que *p*	
L_K	$[K]p$	Un agente sabe que *p*	$\langle E, \Psi^K, v\rangle$
	$\langle K\rangle p$	Para un agente, es posible epistémicamente que *p*	
L_B	$[B]p$	Un agente cree que *p*	$\langle E, \Psi^B, \nu\rangle$
	$\langle B\rangle p$	Para un agente, es posible doxásticamente que *p*	
L_{PF}	$[P]p$	En todo momento pasado, *p*	$\langle T, <, v\rangle$
	$\langle P\rangle p$	En algún momento pasado, *p*	
	$[F]p$	En todo momento futuro, *p*	
	$\langle F\rangle p$	En algún momento futuro, *p*	

Sea $[O]$ un operador modal universal y $\langle O\rangle$ su dual particular, por ejemplo, $[K]$ y $\langle K\rangle$. La gramática de cualquier lenguaje considera un conjunto, *P*, de parámetros proposicionales, *p*, *q*, *r*, …, las conectivas funcionales de verdad ¬ y Λ, un operador modal universal, $[O]$, y paréntesis auxiliares (y). Sean *A*, *B* y *C* fórmulas bien formadas arbitrarias. La gramática de cualquier lenguaje se rige por las siguientes reglas de formación:

$$p\text{: } p \in \mathcal{P} \,|\, \neg\, (A) \,|\, (A \land B) \,|\, [O]\ (A)$$

Normalmente los paréntesis se omiten cuando no hay riesgo de ambigüedad. En todos los lenguajes, $\lor$, $\supset$, $\equiv$, T, $\bot$ y $\langle O\rangle$ se definen como es usual.

Cada lógica tiene algunas definiciones distintivas, propiamente:

$p \Rightarrow q$	$=_{def}\ \Box\,(p \supset q)$	*p* implica estrictamente a *q*
∇p	$=_{def} \Diamond\, p \land \Diamond\, \neg p$	Es contingente que *p*
Δp	$=_{def} \Box\, p \lor \Box\, \neg p$	No es contingente que *q*
$\backslash\mathrm{K}/p$	$=_{def} \neg[K]p \land \neg[K]\neg p$	El agente no sabe si *p*
$/\mathrm{K}\backslash p$	$=_{def}\ [K]p \lor [K]\neg p$	El agente sabe si *p*
$\backslash\mathrm{B}/p$	$=_{def} \neg[B]p \land \neg[B]\neg p$	El agente suspende su juicio sobre *p*
$/\mathrm{B}\backslash p$	$=_{def} [B]p \lor [B]\neg p$	El agente tiene una creencia definitiva sobre *p*
$[\mathrm{T}]p$	$=_{def} [P]p \land p \land [F]p$	Siempre *p* (o en todo momento *p*)
$\{\mathrm{T}\}p$	$=_{def} \langle P\rangle p \lor p \lor \langle F\rangle p$	Alguna vez *p*

Nótese que $\nabla p \equiv \neg\, \Delta p$, $\backslash K/p \equiv \neg/K\backslash p$, $\backslash\mathrm{B}/\equiv\neg\, /\mathrm{B}\backslash p$ y $[\mathrm{T}]\ p \equiv\neg\, \langle T\rangle\, \neg p$.[1]

Los lenguajes de las lógicas usualmente se interpretan con modelos de Kripke —aunque hay otras opciones, como las semánticas de vecindades (*cfr*. Pacuit, 2017)—. En el caso alético, una interpretación es $\langle W, R, v\rangle$, donde *W* es un conjunto no vacío de mundos posibles, *R* es una relación binaria de accesibilidad, $R \subseteq W \times \mathrm{W}$, y *v* es una función valuadora, v: $W \times P \mapsto \{1,0\}$, tal que $v_W(\mathrm{p})$=1 quiere decir que *p* es verdadera en *w*. Las condiciones de verdad de los conectivos

1 $\Rightarrow$ se debe a Irving Lewis (1918) (por motivos tipográficos, no usaré su gancho); ∇ y Δ, a Hugh Montgomery y Richard Routley (1966), aunque Rudolf Carnap (1956: § 39) ya tenía algunas nociones similares; $\backslash K/p$ y $/K\backslash p$ se usan frecuentemente en la literatura, pero la notación para que quede clara su proximidad con Δ y Δ es mía, lo mismo con $\backslash B/p$ y $/B\backslash p$; la idea de leer a $\backslash B/p$ como una suspensión del juicio proviene de Richard Feldman (2003:16); la lectura de $/B\backslash p$ proviene de Evgeni Zolin (1999); la notación histórica original para $\langle\mathrm{T}\rangle$ y $\langle\mathrm{T}\rangle$ es *A* y *S*, respectivamente, la notación con corchetes fue introducida por primera vez, hasta donde tengo noticia, en Sánchez Hernández (2022).

se relativizan a mundos y las de los operadores modales dependen de las relaciones de accesibilidad:

$v_w(\neg A) = 1$ sii (si y sólo si) $v_w(A) = 0$
$v_w(A \wedge B) = 1$ sii $v_w(A) = v_w(B) = 1$
$v_w(\Box A) = 1$ sii para todo $w \in W$ tal que wRw', $v_{w'}(A) = 1$
$\nu_{w'}(A)=1$ $v_w(\Diamond A) = 1$ sii para algún $w \in W$ tal que wRw', $(A)=1$

Sea Σ un conjunto arbitrario de fórmulas bien formadas. La validez semántica se define en términos de la preservación de la verdad a través de mundos.

$\Sigma \vDash A$ sii para todo modelo, $\langle W, R, \nu\rangle$, y para todo $w \in W$, si para toda $B \in \Sigma$, $\nu_w(B)=1$, entonces $\nu_w(A)=1$

$\vDash A$ sii $\emptyset \vDash A$, *i. e.*, para todo modelo, $\langle W, R, \nu\rangle$, y para todo $w \in W$, $\nu_w(A)=1$

Las demás lógicas tienen la misma noción semántica de verdad *mutatis mutandis*.

Ahora bien, cuando se trabaja con lógicas temporales, es usual modificar ligeramente la interpretación de un modelo de Kripke. En lugar de mundos, *W*, se usan tiempos, *T*; y en lugar de una relación de accesibilidad, *R*, se usa una de sucesión, <. La intuición detrás de esto es: los momentos que conforman al tiempo son distintos a los mundos, aun si entre ambos hay algunas similitudes en sus comportamientos. Cuando pasamos a las lógicas epistémicas, doxásticas y epistémico-doxásticas, normalmente no se hace ese cambio; en esos casos, se sigue usando *W* y *R*. A mi consideración, podemos modificar esta práctica utilizando un conjunto *E* de estados epistémicos y una relación de accesibilidad entre ellos, Ψ^K para lo epistémico y Ψ^B para lo doxástico. En el siguiente apartado, presento cómo esta distinción filosófica traerá algunos resultados técnicos para las lógicas alético-epistémicas que a su vez suscitan nuevas perspectivas filosóficas con sus problemas concomitantes.

SISTEMA AXIOMÁTICO DE (*T/T/KD**) Y SUS SEMÁNTICAS

La lógica básica que consideraré en este artículo puede plantearse axiomáticamente de la siguiente forma:

(LC) Todas las tautologías, $\vdash A$, de la lógica clásica proposicional
(SU) Si $\vdash A$ y p forma parte de A, entonces la fórmula A' resultante de sustituir uniformemente a p por, B $[p / B]$, también es un axioma o teorema, $\vdash A'$
(MP) Si $\vdash A$ y $\vdash A \supset B$, entonces $\vdash B$
(N$\Box$) Si $\vdash A$, entonces $\vdash \Box A$
(NK) Si $\vdash A$, entonces $\vdash [K]A$
(NB) Si $\vdash A$, entonces $\vdash [B]A$
(C$\Box$) $\Box (p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
(CK) $[K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q)$
(CB) $[B](p \supset q) \supset ([B]p \supset [B]q)$
(T$\Box$) $\Box p \supset p$
(TK) $[K]p \supset p$
(DB) $[B]p \supset \neg [B] \neg p$
(KB) $[K]p \supset [B]p$

Al trabajar las versiones normales, se acepta a la regla de necesariedad (*necessitation*) en sus versiones alética, epistémica y doxástica; si A es una verdad lógica, A es necesaria y nuestro agente tanto la sabe como la cree. (NK) y (NB) suelen negarse en la literatura porque hacen que un agente sea omnisciente de la lógica clásica; aunque las lógicas multimodales proveen un nuevo marco conceptual para criticar este problema, por cuestiones de espacio no podré analizarlo aquí.[2] Se aceptan también los principios de cerradura alética, epistémica y doxástica en sus versiones materiales, las críticas a sus versiones estrictas vendrán en el aparta-

2 Aunque sí lo haré en otro trabajo.

do 5. Adicionalmente, acepto los axiomas T alético, lo necesario es verdadero; T epistémico, el conocimiento es verdadero; D doxástico, las creencias de un agente son consistentes; y, para hacer justicia al análisis tradicional del conocimiento (*cfr.* Ichikawa y Steup, 2018: sec. 1), el conocimiento implica a la creencia. No consideraré ningún principio de introspección, aunque en el apartado 5 veré sistemas basados en *S5*. El sistema propuesto puede llamarse *T/T/KD**.

Las semánticas que propongo para el lenguaje de *T/T/KD**, $L_{\square} \cup L_{K} \cup L_{B}$, son $\langle W, E, R_e, \Psi K_W, \Psi B_W, v \rangle$.

W y E son conjuntos no vacíos de mundos posibles y estados epistémicos respectivamente.

R_e es una relación trinaria entre mundos posibles y estados epistémicos, $R_e \subseteq W \times E \times W$, e indica que los mundos posibles se relacionan en ciertos estados epistémicos específicos. De esta forma, $w_i R_{e_x} w_j$ significa que 'en e_x, w_i accede a (se relaciona con) w_j'. Para tener a (T□), R_e es relativamente reflexiva:

Para todo $w_i \in W$ y $e_x \in E$, $w_i R_{ex} \ w_i$

ΨK_W es una relación trinaria, $\Psi K_W \subseteq E \times W \times E$, e indica que una relación epistémica sucede en un mundo posible específico. Así pues, $e_x \Psi K_{W_i} e_y$ quiere decir 'en w_i, e_x accede epistémicamente a e_y'. Para tener a (TK), ΨK_W es relativamente reflexiva:

Para todo $w_i \in W$ y $e_x \in E$, $e_x \Psi K_{W_i} e_x$

ΨB_W es similar a ΨK_W mutatis *mutandis*. Para tener a (DB), ΨB_W es relativamente serial:

Para todo $e_x \in E$ *y* $w_i \in W$ hay un e_y tal que $e_x \Psi B_{W_i} e_y$

Para tener (KB), aceptamos que:

$\Psi B_W \subseteq \Psi K_W$

v es una función valuadora, $v: W \times E \times P \mapsto \{1,0\}$, tal que $v_{w_i/e_x}(p)=1$ quiere decir que 'en w_i de *ex*, *p* es verdadera'.

Las condiciones de verdad de las conectivas proposicionales se relativizan a tuplas *w/e*:

$\nu_{w/e}(\neg A) = 1$ sii $\nu_{w/e}(A) = 0$
$\nu_{w/e}(A \wedge B) = 1$ sii $\nu_{w/e}(A) = \nu_{w/e}(B) = 1$
$\nu_{w/e}(A \vee B) = 1$ sii $\nu_{w/e}(A) = 1$ o $\nu_{w/e}(B) = 1$

Las condiciones de los operadores aléticos, epistémicos y doxásticos se relativizan a mundos y estados epistémicos:

$\nu_{w/e}(\Box A) = 1$ sii para todo $w' \in W$ tal que $w R_e w'$, $\nu_{w'/e}(A) = 1$
$\nu_{w/e}([K]A) = 1$ sii para todo $e' \in E$ tal que $e \Psi K_w e'$, $\nu_{w/e'}(A) = 1$
$\nu_{w/e}([B]A) = 1$ sii para todo $e' \in E$ tal que $e \Psi B_w e'$, $\nu_{w/e'})(A) = 1$

Las condiciones para, $\Diamond$ $\langle K \rangle$ y $\langle B \rangle$ cambian 'todo' por 'algún'. Debido a que las condiciones sólo están relativizadas, $[O]A \equiv \neg \langle O \rangle \neg A$.

La validez semántica se define por la preservación de la verdad a través de mundos y estados epistémicos:

$\Sigma \vDash A$ sii para toda $\langle W, E, R_e, \Psi K_w, \Psi B_w, v \rangle$, para todo $w \in W$ y $e \in E$, si para toda $B \in \Sigma$, si $v_{w/e}(B) = 1$, $v_{w/e}(A) = 1$

$\vDash A$ sii $\emptyset \vDash A$, *i. e.*, para toda $\langle W, R_e, \Psi_{Kw}, \Psi_{Bw}, v \rangle$ y para todo $w \in W$ y $e \in E$, $v_{w/e}(A) = 1$

La relativización de las condiciones de verdad no afecta en nada a la validez de los elementos del sistema axiomático. *T/T/KD**es una extensión propia de todos los sistemas que lo componen. Una interpretación de *T* alética es una de *T/T/KD** en la que $E = \{e_0\}$; una interpretación de *T/KD**es una de *T/T/KD**en la que $W = \{w_0\}$.El hecho anterior sugiere que en general se ve a la lógica alética impersonalmente y que a las epistémico-doxásticas no se les consideran más allá de una circunstancia.

El lenguaje de *T/T/KD** es más expresivo que los de las lógicas que lo componen y permite revisar a la par tanto actitudes epistémico-doxásticas hacia la lógica alética como las condiciones aléticas de nuestros conocimientos y creencias. En los siguientes apartados, se revisarán algunos ejemplos de aplicación.

Antes de continuar, haré algunos comentarios sobre las semánticas de fusión para *T/T/KD**.[3] La idea de desarrollar las semánticas de un sistema alético-epistémico-doxástico surgió como el desarrollo de una analogía con respecto a las semánticas del sistema alético-temporal *MT*, cuyo lenguaje es $L_{\Box} \cup L_{PF}$ (*cfr*. Sánchez, 2022). Una interpretación para éste es una tupla $\langle W, T, R_t, <_w, v\rangle$, donde T es un conjunto de tiempos y los demás detalles técnicos son similares a los de un modelo para *T/T/KD**. R_t indica que las relaciones aléticas cambian con el tiempo, su motivación son las oraciones como: "En 1932, a Inglaterra le era posible evitar la guerra con Alemania, pero le fue imposible para 1937". $<_w$ indica que cada mundo tiene su propio orden temporal. Una característica importante de *MT* es que invalida

(1) $[T]\langle F\rangle\top \supset \Box [T]\langle F\rangle\top$

Aún si en este mundo no hay un final para el tiempo, puede que haya un mundo en el que sí (Correia y Rosenkranz, 2019: 7).

Análogamente, en una lógica alético-epistémico-doxástica, las relaciones entre mundos deberían variar entre estados epistémicos, R_e, y la accesibilidad de los estados epistémicos debería variar entre mundos, ΨK_w y ΨB_w. Esta analogía lleva a la, quizá, más importante propiedad de estas semánticas. De manera usual la discusión sobre la ontología de los mundos posibles se divide entre los realistas modales —o platónicos modales, como prefiere Stephen Read (1994)—, quienes afirman que los mundos posibles son tan reales como el nuestro, y los actualistas, quienes creen que los mundos posibles sólo son entidades mentales distintas al mundo real, sean conjuntos consistentes o reorganizaciones del mismo (*cfr*. Men-

3 *T/T/KD** no es el único sistema alético-epistémico en la literatura y las semánticas propuestas no son las únicas posibles a desarrollar. Alexandre Costa-Leite (2016) ha desarrollado las semánticas de producto para el sistema $S5^{\Delta}\oplus S5^{*}$. Acerca de distintos métodos para combinar lógicas, véase Carnielli y Coniglio, 2020: sec. 4.

zel, 2016).[4] Al trabajar con *R simpliciter*, uno puede optar por la posición de su preferencia dadas sus razones filosóficas, la cuestión es externa a la lógica, pero con R y v relativizadas a E, uno se ve obligado a aceptar un actualismo, las semánticas de mundos posibles sólo tienen sentido dentro de la mente de un agente. Discutiré esto último en el apartado 4.

Ahora bien, hay sistemas que no requieren a E para distinguir entre modalidades aléticas y epistémicas. Daniel Rönnedal (2021), por ejemplo, ha desarrollado un sistema temporal, alético, volitivo y doxástico, que sólo requiere de W y T; los mundos aléticos se distinguen de los doxásticos sólo por las relaciones de accesibilidad, así como en una lógica epistémico-doxástica distinguimos entre los estados epistémicos y doxásticos por Ψ^K y Ψ^B. Técnicamente hablando, no requerimos de E para montar una lógica alético-epistémico-doxástica, pero podría preguntarse por qué sólo se requeriría de . Cuando trabajamos con lógicas alético-temporales, distinguimos con claridad entre W y T, pues sería raro no hacerlo. Lo más natural es distinguir entre los miembros de W y E, aun si no es fácil decir qué son cada uno, por ello, desde mi punto de vista, la interpretación actualista es un motivo importante para considerar que son distintos.

Árboles de *T/T/KD**

Aunado al sistema axiomático de *T/T/KD**, se puede desarrollar un sistema de árboles para tener otra noción de validez sintáctica. Los árboles de *T/T/KD** tienen cuatro tipos de nodos: A, w_i/e_x quiere decir que A es verdadera en w_i del e_x; $w_i\, R_{ex}\, w_j$, que en e_x, w_i accede a w_j; $e_x \Psi K_{w_i} e_y$, que en w_i, e_x accede epistémicamente a e_y; $e_x \Psi B_{w_i} e_y$, que en w_i, e_x accede doxásticamente a e_y. Una lista inicial consta de un nodo B, w_0/e_0 para cada premisa (si hay alguna) y $\neg A$, w_0/e_0 para la conclusión. Una rama de un árbol se cierra, ×, si en ella aparecen A, w_i/e_x y $\neg A$, w_i/e_x.

4 Otra posición es el meinongnianismo, los mundos posibles son cosas que no existen (*cfr*. Priest, 2008: secc. 2.8, 2.10 y 2.11), pero esta postura no es relevante para la discusión.

Las reglas de árboles para las conectivas proposicionales son las mismas que las de los árboles proposicionales excepto porque llevan un índice de mundos y estados. Éstas son las reglas de ∧ y de ∨:

$$\begin{array}{c} A \wedge B, w_i/e_x \\ \downarrow \\ A, w_i/e_x \\ B, w_i/e_x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \neg(A\wedge B), w_i/e_x & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A, w_i/e_x & & \neg B, w_i/e_x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B, w_i/e_x & \\ \swarrow & & \searrow \\ A, w_i/e_x & & B, w_i/e_x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A\vee B), w_i/e_x \\ \downarrow \\ \neg A, w_i/e_x \\ \neg B, w_i/e_x \end{array}$$

Para los operadores hay dos tipos de reglas. Primero, las de equivalencia:

$$\begin{array}{c} \neg[O]A, w_{\mathrm{i}}/e_x \\ \downarrow \\ \langle O\rangle\neg A, w_i/e_x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\langle O\rangle A, w_i/e_x \\ \downarrow \\ [O]\neg A, w_i/e_x \end{array}$$

Segundo, las reglas de inferencias:

$$\begin{array}{c} \Box A, w_i / e_x \\ w_i R_{e_x} w_j \\ \downarrow \\ A, w_j / e_x \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Diamond A, w_i / e_x \\ \downarrow \\ w_i R_{e_x} w_j \\ A, w_j / e_x \end{array}$$

$$\begin{array}{c} [K]A, w_i / e_x \\ e_x \Psi K_{w_i} e_y \\ \downarrow \\ A, w_i / e_y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \langle K \rangle A, w_i / e_x \\ \downarrow \\ e_x \Psi K_{w_i} e_y \\ A, w_i / e_y \end{array} \qquad \begin{array}{c} [B]A, w_i / e_x \\ e_x \Psi B_{w_i} e_y \\ \downarrow \\ A, w_i / e_y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \langle B \rangle A, w_i / e_x \\ \downarrow \\ e_x \Psi B_{w_i} e_y \\ A, w_i e_y \end{array}$$

En la regla de $\Box$, $w_i R_{e_x} w_j$ debe estar en la rama independientemente del orden; en la regla de $\Diamond$, j es un número de mundo nuevo en la rama. Comentarios similares se aplican a las reglas de $[K]$ y $[B]$; en reglas las de $\langle K \rangle$ y $\langle B \rangle$, es un número de estado mental nuevo en la rama. Nótese que en las reglas inferiores se corresponden las letras de operadores y de relaciones, por ejemplo, $[K]$ requiere líneas de Ψ^K. En todas las reglas, siempre se mantiene un índice igual: en las de $\Box$ y $\Diamond$, e_x; en las de operadores epistémicos y doxásticos, w_i.

Un consejo para la introducción de líneas de relaciones es primero escribir la relación principal, luego el subíndice y luego, si se trata de un operador epistémico o doxástico, el índice, teniendo cuidado en cada paso de poner lo correspondiente:

$$e_x \Psi e_y \Rightarrow e_x \Psi_{w_i} e_y \Rightarrow e_x \Psi B_{w_i} e_y$$

Para cualesquiera operadores, O, las reglas para contingencia y no contingencia son las siguientes:

$$\begin{array}{c} \neg \backslash O / A, w_i / e_x \\ \downarrow \\ /O \backslash A, w_i / e_x \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg / O \backslash A, w_i / e_x \\ \downarrow \\ \backslash O / A, w_i / e_x \end{array} \qquad \begin{array}{c} \backslash O / A, w_i / e_x \\ \downarrow \\ \langle O \rangle A, w_i / e_x \\ \langle O \rangle \neg A, w_i / e_x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & /O \backslash A, w_i / e_x & \\ \swarrow & & \searrow \\ [O]A, w_i / e_x & & [O]\neg A, w_i / e_x \end{array}$$

Las primeras dos reglas son equivalencias, en las otras dos, sólo hay que tener cuidado de poner el operador correspondiente, por ejemplo, si se tiene ◊A, las ramas son ◊A y ◊¬A.

Por mor a la simplicidad, primero desarrollo las reglas que no generan bifurcaciones.

Para las restricciones a las relaciones, requerimos las siguientes reglas:

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & e_x\,\Psi B_{w_i} e_y \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w_i R_{e_x} w_i & e_x\,\Psi K_{w_i}\; e_x & e_x\,\Psi B_{w_i}\, \mathrm{e}_y & e_x\,\Psi K_{w_i} e_y \end{array}$$

Las primeras dos reglas se aplican a cada i y x en la rama; es recomendable hacerlo tan pronto aparezca un número nuevo en la rama y apenas comienza un árbol se pueden aplicar inmediatamente a w_0 y a e_0. La tercera se aplica a cada e_x y w_i en la rama, lo recomendable es hacerlo cuando ya no se pueda con ninguna otra regla porque puede generar ramas infinitas. La cuarta regla se aplica a cada línea $e_x\,\Psi B_{w_i} e_y$, prefiero introducir siempre una línea $e_x\,\Psi K_{w_i} e_y$ cada vez que ha aparecido una nueva de $e_x\,\Psi B_{w_i} e_y$. Por facilidad y economía de espacio, apunto más de una línea en un solo renglón.

Un árbol está *completo* si todas las reglas que han podido aplicarse fueron empleadas; o, aunque tenga una rama infinita, digamos, se sabe que aplicar una regla ya no tiene efecto en la clausura.

Como un ejemplo sencillo, pero importante, consideremos la siguiente inferencia descubierta por Von Wright (1983: 68) como la reformula Costa-Leite (2016: 527):

(2) $\nabla p \wedge [K]p \vdash \nabla [K]p$

Aquí está el árbol que lo demuestra:

$$
\begin{array}{c}
\nabla p \wedge [K]p,\ w_0/e_0 \\
\neg\nabla[K]p,\ w_0/e_0 \\
w_0\ R_{e_0}\ w_0,\ e_0\ \Psi K_{w_0 e_0} \\
\Delta[K]p,\ w_0/e_0 \\
\nabla p,\ w_0/e_0 \\
[K]p,\ w_0/e_0 \\
\Diamond p,\ w_0/e_0 \\
\Diamond\neg p,\ w_0/e_0 \\
w_0\ R_{e_0}\ w_1,\ w_1\ R_{e_0}\ w_1,\ e_0\ \Psi K_{w_1 e_0} \\
p,\ w1/e_0 \\
w_0\ R_{e_0}\ w_2,\ w_2\ R_{e_0}\ w_2,\ e_0\ \Psi K_{w_2 e_0} \\
\neg p,\ w_2/e_0 \\
p,\ w_0/e_0 \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\Box[K]p,\ w_0/e_0 & \qquad\qquad & \Box\neg[K]p,\ w_0/e_0 \\
[K]p, w_2/e_0 & & \neg[K]p, w_0/e_0 \\
p, w_2/e_0 & & \times \\
\times & &
\end{array}
$$

La rama de la derecha se cierra debido a que $[K]p,\ w_0/e_0$ ya está en la rama, pero aún si se le siguieran aplicando reglas, se cerraría.

En su momento, Von Wright demostró a (2) axiomáticamente. Lo que sigue es una reconstrucción propia (la numeración romana es para no interferir con el resto del artículo):

(I)	$[K]\, p \supset p$	(TK)
(II)	$\Box([K]p \supset p)$	(N$\Box$) a (I)
(III)	$\Box[K]p \supset \Box p$	(MP) por (II) y (C$\Box$)
(IV)	$\neg\Box p \supset \neg\Box[K]p$	Transposición a (III)
(V)	$\Diamond\neg p \supset \Diamond\neg[K]\, p$	Definición de $\Diamond$ a (IV)
(VI)	$\Box\neg p \supset \neg p$	$[p/\neg p]$ a (T$\Box$)
(VII)	$p \supset \neg\Box\neg p$	Transposición a (VI)
(VIII)	$p \supset \Diamond p$	Definición de $\Diamond$ a (VII)
(IX)	$[K]p \supset \Diamond[K]p$	$[p/[K]p]$ a (VIII)

(X)	$(p \supset q) \supset \big((r \supset s) \supset ((p \wedge r) \supset (q \wedge s))\big)$	Tautología clásica
(XI)	$(\Diamond\neg p \wedge [K]p) \supset (\Diamond\neg[K]p \wedge \Diamond[K]p)$	(MP) por (V), (IX) y (X)
(XII)	$(\Diamond\neg p \wedge [K]p) \supset \nabla[K]p$	Definición de ∇ a (XI)

Se puede apuntar que $\Diamond$p sobra en (2) a comparación de (XII), pero no hay problema porque:

(3) $[K]p \supset \Diamond p$

Esto resulta de un silogismo hipotético entre las líneas (I) y (VIII) en la reconstrucción.

Un debate contemporáneo sobre la lógica epistémica es *en qué consiste que algo sea una posibilidad epistémica y si puede coincidir con la posibilidad metafísica* (*cfr*. Egan y Weatherson, 2011, que es una compilación de escritos al respecto). Si esto se formula así:

(4) $\langle K\rangle p \supset \Diamond p$

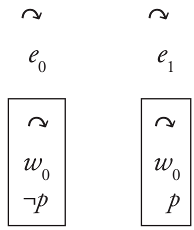
entonces es inválida en *T/T/KD**. Aquí está el árbol:

$$\begin{array}{c}
\neg(\langle K\rangle p \supset \Diamond p), w_0 / \mathrm{e}_0 \\
w_0\, R_{\mathrm{e}_0}\, w_0,\ e_0\, \Psi K_{w_0} e_0 \\
\langle K\rangle p,\ w_0 / e_0 \\
\neg\Diamond p, w_0 / e_0 \\
\Box\neg p, w_0 / e_0 \\
\neg p, w_0 / e_0 \\
e_0 \Psi K_{w_0} e_1, e_1\, \Psi K_{w_0}\, e_1, w_0 R_{\mathrm{e}_1} w_0 \\
\neg p, w_0 / e_1 \\
e_1 \Psi K_{w_0}\, e_2, e_1 \Psi K_{w_0} e_2 \\
\vdots
\end{array}$$

El árbol se vuelve infinito por la regla para la serialidad de ΨB_w, pero es completo porque, no importa cuántas veces se aplique la regla, no se cierra.

Los contramodelos para una inferencia pueden obtenerse a partir de una rama abierta. Para cada w_1 y e_x en la rama, $w_i \in W$ y $e_x \in E$. $R_{e_x} = \{\langle w_i, w_j \rangle : e_x Rw_i\, w_j$ aparece en la rama$\}$. ΨK_w y ΨB_w se determinan similarmente. Si $p, w_i/e_x$ aparece en la rama, $v_{w_i/e_x}(p)=1$; si $\neg p, w_i/e_x$ aparece, $v_{w_i/e_x}(p)=0$; si no aparece ninguno, $v_{w_i/e_x}(p)$ puede ser arbitraria.

El contramodelo del árbol de (4) es infinito; no obstante, a prueba y error puede encontrarse un contramodelo finito. Un par de técnicas generalmente buenas para lograr esto son o permitir que, para algún e_x en w_i, $e_x \Psi B_{w_i} e_x$, esto es hacer reflexiva una relación serial, o permitir que $\Psi K_w = \Psi K_w$ para algún w, aunque esto hace válidas a $[K]p \equiv [B]p$ y $\langle K \rangle p \equiv \langle B \rangle p$ en ese w. Suponiendo que $\Psi K_{w_0} = \Psi K_{w_0}$, un contramodelo finito para (4) es el siguiente: $W=\{w_0\}$; $E=\{_{e_0}\}$; $R_{e_0})=\{w_0\ w_0\}$; $R_{e_1})=\{w_0\ w_0\}$; $\Psi K/W_0 = \Psi K/W_0 = \{e_0\ e_0, e_0\ e_1, e_1\ e_1\}$; $v_{w_0/e_0}(p)=0$ y $v_{w_0/e_1}(p)=1$. Éste puede ilustrarse de la siguiente forma (con cajas por motivos tipográficos y omitiendo las flechas para ΨK_{w_0}):



Considerando que e_0 representa al estado real de las cosas, como es usual, puede ser el caso de que p sea necesariamente falsa, aun si se puede concebir un estado donde se crea que sí es verdadera. Es distinto lo que sucede en el mundo real a lo que uno maquina en su cabeza.

El sistema de árboles mostrado en esta sección es correcto y completo respecto a las semánticas de $T/T/KD^*$. La prueba es una simple modificación de aquella en Sánchez (2022: sec. 6).[5]

5 Eventualmente saldrá completa en la tesis de la que este trabajo es un adelanto.

Algunas afirmaciones spinozianas

Es bien sabido que en la historia de la filosofía Baruch Spinoza (1632-1670) afirmaba que todo es metafísicamente necesario, él decía:[6]

> En la naturaleza no se da nada contingente, sino que todas las cosas son determinadas a existir y a operar de un cierto modo en virtud de la necesidad de la naturaleza divina. (E1/29; Spinoza, 2020: 79)
>
> Las cosas no han podido ser producidas por Dios de otro modo ni según otro orden que como han sido producidas. (E1/33; Spinoza, 2020: 84)

La razón obvia es que, si sólo hay una sustancia —un único mundo posible—, entonces las cosas existentes en ella sólo pueden ser de una forma y no de otra. El punto de vista según el cual todo es necesario se conoce como *necesitarismo*.[7] Para los comentaristas, Spinoza es un necesitarista, aunque difieren en cómo afirma la necesidad regente en la realidad, pues no es tan obvio qué significa que algo sea contingente, debatiendo así el grado de su afirmación (Newlands, 2018: Introducción). Independientemente de cuál sea el estatus ontológico de la contingencia para Spinoza (a mi parecer nulo),[8] él responde qué es, no desde la metafísica, sino desde la epistemología:

> Se dice necesaria una cosa, o bien en razón de su esencia, o bien en razón de su causa. Pues la existencia de una cosa cualquiera se sigue necesariamente o bien de su misma esencia y definición, o bien de una causa eficiente dada. Y además, por esto mismo se dice una cosa imposible, o bien porque su esencia, o sea, su definición, implica contradicción, o bien porque no se da ninguna causa externa determinada a producir tal cosa. Pero *una cosa no se dice contingente por ninguna otra causa, a no*

6 La forma para referir a la *Ética demostrada según el orden geométrico*, 'E$/#' significa '*Etica*, parte $, proposición #', con una *d* para demostración, *e* para escolio y *c* para corolario.

7 No confundir con el *fatalismo*, el cual involucra la voluntad de Dios en la selección de un destino (*cfr*. Sánchez, 2020: xviii-xix y 98 ss.).

8 Jon A. Miller (2001) sugiere que Spinoza sí tiene un entendido metafísico de la posibilidad e incluso lo requiere para establecer su necesitarismo, aunque en *Pensamientos metafísicos* (I, 3; II, 7) Spinoza afirma que la contingencia no es algo real ni una afección de las cosas.

Signos Filosóficos, vol. XXIV, núm. 48, julio-diciembre, 2022, 114-151, ISSN: 1665-1324

> *ser por un defecto de nuestro conocimiento*. Pues una cosa de cuya esencia ignoramos implica contradicción, o de la que sabemos bien que no implica ninguna contradicción, pero de la que tampoco podemos afirmar nada cierto acerca de su existencia por ocultársenos el orden de las causas, esa cosa nosotros no podemos verla nunca ni como necesaria ni como imposible. Y por eso la llamamos o contingente o posible. (E1/33e1; Spinoza, 2020: 84-85; énfasis mío)

El entendido de necesidad de Spinoza se parece al nuestro. Esto es más claro si empezamos con la imposibilidad (de hecho, en el *Tratado de la reforma del entendimiento*, §52, éste es el término modal básico). Para Spinoza, todo lo que sea una contradicción por su sola definición es imposible; de cierta forma, esto se parece a (N$\Box$): $\vdash \neg A$, entoces $\vdash \Box\neg A$. Su ejemplo favorito era considerar un círculo cuadrado: al ser éste una contradicción por su sola definición es imposible que exista. Con respecto a lo necesario, él consideraba posible demostrar la existencia de Dios; si la demostración es válida, es una contradicción que Dios no exista, y, por equivalencia, ello vuelve no sólo verdadera su existencia, sino necesaria. Valga considerar que las tres demostraciones para "Dios [...] existe necesariamente" (E1/11; Spinoza, 2020 52) son reducciones al absurdo.[9]

Con respecto a los modos finitos de Dios —las cosas contingentes como nosotros, los animales, las estrellas—, éstos no son necesarios ni imposibles como se ha dicho hasta ahora. Digamos, mi existencia no es una contradicción en sí misma (de hecho, existo), pero tampoco es una verdad demostrable lógicamente.[10] De nueva cuenta, Spinoza sigue pareciéndose a nosotros, $\nabla p \equiv (\neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p)$, aunque difiere en lo siguiente: aún si algo es contingente por definición, si exis-

9 Como es de esperarse, han habido intentos por formalizar la *Ética*, por ejemplo, el de Charles Jarrett (1978), sin embargo, no es necesario fijarse tanto en los detalles.

10 Para conciliar la existencia necesaria de Dios con lo existente en él, una interpretación reciente que ha tomado valor afirma que las cosas contingentes por definición existen necesariamente de forma colectiva. En cualquier consideración, parece falso que "si Dios existe necesariamente, Juan también", pero, en el marco de la ontología spinoziana (donde los modos —finitos e infinitos— son expresiones de la sustancia) es plausible que "si Dios existe necesariamente, es necesaria la totalidad de las cosas predicables de él (entre las cuales está Juan no aisladamente)". Esto se conoce como *necesitarismo reivindicado* (*cfr*. Newlands, 2018: sec. 1.2.5). Algo interesante es que

te, ello se debe a una causa por la que es necesario que exista, y si no existe, es imposible que lo haga porque no se dieron las causas para ello. Digamos, no es meramente posible que yo exista, es necesario dada una serie causal; a su vez, es imposible que exista un hermano biológico menor a mí por cinco años porque no se dieron las causas apropiadas para ello. Que sólo haya una sustancia y una sola cadena causal le parece suficiente a Spinoza para afirmar que todo es necesario, incluso lo aparentemente contingente. Si conociéramos las determinaciones de la naturaleza y la serie causal por la cual sucede todo, dejaríamos de pensar en las cosas como posibles o contingentes y sólo nos quedaríamos con lo necesario para aquello que es verdadero y lo imposible para lo que es falso.

En honor a las ideas de Spinoza, introduciré la siguiente definición:

> Una fórmula es una modalidad spinoziana sii se cierra bajo una implicación y la creencia o conocimiento de una modalidad alética implica la negación o de un conocimiento o de una creencia.

Todas las inferencias en este apartado serán modalidades spinozianas. Por lo que se ha expuesto, parece que Spinoza aceptaría:

(5) $[B]\nabla p \supset \neg /K\backslash p$

Este árbol muestra que no es una verdad lógica:

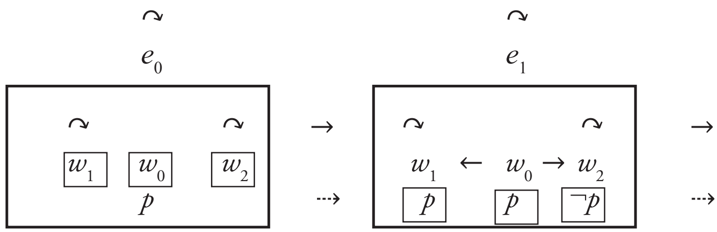
$$\begin{array}{c}
\neg([B]\nabla p \supset \neg/K\backslash p), w_0 /e_0 \\
w_0\, R_{e_0}\, w_0, e_0\, \Psi K_{w_0} e_0 \\
[B]\nabla p, w_0 /e_0 \\
\neg\neg/K\backslash p, w_0 /e_0 \\
/K\backslash p, w_0 /e_0 \\
\swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
[K]p, w_0 /e_0 & [K]\neg p, w_0 /e_0 \\
p, w_0 /e_0 & \neg p, w_0 /e_0
\end{array}
\end{array}$$

---

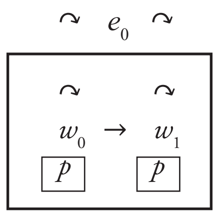
permite el necesitarismo circunstancial: dadas ciertas circunstancias, . Dado mi entorno actual y condición corporal, vivo y es imposible que no viva.

$$
\begin{array}{cc}
e_0\Psi B_{w_0}e_1, e_0\Psi K_{w_0}e_1, e_1\Psi K_{w_0}e_1 & e_0\Psi B_{w_0}e_1, e_0\Psi K_{w_0}e_1, e_1\Psi K_{w_0}e_1 \\
\nabla p, w_0/e_1 & \neg\nabla p, w_0/e_1 \\
p, w_0/e_1 & p, w_0/e_1 \\
\Diamond p, w_0/e_1 & \Diamond p, w_0/e_1 \\
\Diamond\neg p, w_0/e_1 & \Diamond\neg p, w_0/e_1 \\
w_0R_{e_1}w_1, w_1R_{e0}w_1, w_1R_{e_1}w_1 & w_0R_{e_1}w_1, w_1R_{e0}w_1, w_1R_{e_1}w_1 \\
p, w_1/e_1 & p, w_1/e_1 \\
w_0R_{e_1}w_2, w_2R_{e0}w_2, w_2R_{e_1}w_2 & w_0R_{e_1}w_2, w_2R_{e0}w_2, w_2R_{e_1}w_2 \\
\neg p, w_2/e_1 & \neg p, w_2/e_1 \\
e_1\ \Psi B_{w_0}e_2, e_1\Psi K_{w_0}e_2, e_2\Psi K_{w_0}e_2 & e_1\ \Psi B_{w_0}e_2, e_1\Psi K_{w_0}e_2, e_2\Psi K_{w_0}e_2 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Cualquiera de las ramas se extiende *ad infinitum* y los contramodelos también. Con base en la rama izquierda, uno puede ilustrar un contramodelo así:



Las flechas punteadas son $\Psi B/W$, mientras que $\Psi K/W$ y R_e son las flechas normales. Se puede encontrar un contramodelo finito a prueba y error, aquí hay uno para la misma inferencia:



En este contramodelo, no sólo $[B]\nabla p$, sino que $[K]\nabla p$; también $[K]p$, siendo así que $/K\backslash p$, por lo cual (5) es inválido. Ambos modelos validan $[B]\nabla p$ sin ir en contra de (DB), $[B]p \supset \neg[B]\neg p$; un agente no puede creer que p y $\neg p$, pero sí que $\Diamond p$ y $\Diamond\neg p$ sin caer en contradicción. Considero que ésta es una de las características más atractivas de $T/T/KD^*$: permite creencias consistentes sobre contingencias.

Si Spinoza viera esto, de seguro diría que esto no sucede porque sólo hay un mundo posible. Si fuera el caso de que $W = \{w_0\}$, la inferencia sería válida, pero también trivializaría a la lógica alética, pues $p \equiv \Box p$ y $p \equiv \Diamond p$. Si así respondiera, uno puede preguntar ¿por qué deberíamos aceptar que sólo hay un mundo posible? A lo cual, Spinoza o un spinozista podría preguntar de vuelta ¿por qué deberíamos aceptar que hay más de uno? A favor de que sólo hay uno, los monistas, como los materialistas, tienen por motivo dar cuenta de la cuenta de la causalidad (*cfr*. Papineau, 2020: secc. 1.1-2). Si hubiera dos ámbitos completamente distintos, nada de lo que pasara en uno podría afectar al otro. La interacción es imposible. Ésta era una consideración importante de los estoicos y epicúreos para negar el platonismo (Sharples, 2009: 51), y parece que nosotros podemos aplicarla al realismo modal ¿cómo tenemos conocimiento de algo con lo que no podemos interactuar? En la obra de Spinoza, hay un esfuerzo constante por disolver aparentes oposiciones, como infinito-finito, humano-naturaleza, humano-divino, Dios-Naturaleza (o mundo) (Pineda, 2009: 36), y quizá la más interesante para los comentaristas sea la de mente-cuerpo, pues Spinoza creía que ontológicamente son una misma cosa, pero conceptualmente no son reducibles el uno al otro (*cfr*. Schmidt, 2009).

Ahora bien, aun si se acepta que sólo hay un mundo posible ¿de ello se sigue que no es provechoso estudiar la modalidad? Aunque es debatible, parece que Spinoza no considerabaincompatibles el necesitarismo metafísico y el pensamiento modal.[11] En una de sus cartas escribió: "En la vida diaria, nos vemos obligados a seguir lo más verosímil, pero en la especulación, la verdad" (Ep56; 1988: 329). En sentido estricto, si las cosas pueden ser realmente contingentes o si existe más de un mundo posible, Spinoza diría que hay razones para creer que no; sin embargo, aun si sólo hay un mundo posible, éste no es el único que concibe nuestra mente, en la vida diaria nos vemos obligados a seguir posibilidades verosímiles. Spinoza no concebía la modalidad como algo a evitar en nuestra vida, sino que incluso habría que conocerla para guiarnos lo mejor posible. El arrepentimiento es una tristeza por lo que pudo haber sido; la esperanza, una alegría

11 La defensa de este punto se desarrolla más ampliamente en Sánchez, 2020: sec. 2.4.

inconstante sobre lo que puede suceder; la soberbia, un resultado de pensar más favorablemente sobre nosotros y, el menosprecio, un odio que surge al imaginar lo peor posible de los otros. Se debe conocer el pensamiento modal para usarlo a nuestro favor, en última instancia, Spinoza consideraba que "[e]n la medida en que la mente entiende todas las cosas como necesarias, en esa medida tiene una mayor potencia sobre los afectos, o sea, menos padece por ellos" (E5/6; 2020: 390).[12] Éstas son consideraciones prácticas, pero ello no resta valor a una formulación epistémica a su base; de hecho, en el orden de la *Ética*, la metafísica y la epistemología anteceden a la ética.

Para concluir esta sección, consideremos otras modalidades spinozianas. Como Spinoza afirma que todo es necesario o imposible, *i. e.*, no contingente, es plausible modificar (5) para tener:

(6) $[B]\nabla p \supset \neg/K\backslash\nabla p$

Esta inferencia también es inválida, pero hay una fórmula parecida que sí es válida

(7) $[B]\nabla p \supset \neg[K]\Box p$

aunque es más intuitiva su contraposición.

(8) $[K]\Box p \supset \neg[B]\nabla p$

Comprobar que éstas son válidas, ya sea axiomáticamente o por medio de árboles, es fácil y se deja al lector. A modo de conclusión, (7) sugiere que la intuición de Spinoza no estaba del todo errada, hay creencias sobre modalidades aléticas que implican un desconocimiento.

12 Sobre la relación entre los pensamientos modales y las emociones en la *Ética*, véase Sánchez, 2020: sec. 3.3.

Sobre el principio de cerradura estricta

Como en el caso de la lógica proposicional a la lógica modal, que un axioma o teorema sea válido con ⇒ —implicación material— no conlleva que sea válido con ⇒ —implicación estricta—. Es fácil comprobar que en *T*/*T*/*KD*[*] son válidos:

(T□+) $\square p \Rightarrow p$
(TK+) $[K]\, p \Rightarrow p$
(KB+) $[K]\, p \Rightarrow [B]p$

No obstante, son inválidos los principios de cerradura para la creencia y el conocimiento:

(CB+) $[B](p \Rightarrow q) \Rightarrow ([B]p \Rightarrow [B]q)$
(CK+) $[K](p \Rightarrow q) \Rightarrow ([K]p \Rightarrow [K]q)$

Aun con todo, (CK+) sí es válido si la base tanto para la lógica alética como para la epistémica es *S*5. Hay dos formas de probar esto, una por medio de árboles y otra axiomáticamente.

Al trabajar con base en *S*5, R_e, es una relación de equivalencia en *W* para todo $e \in E$, lo denotamos como $\sim R/e$, y lo mismo *mutatis mutandis* para ΨK_w, $\sim K_w$, por lo que las condiciones de verdad de los operadores aléticos y epistémicos pueden plantearse de la siguiente forma:

$v_{w/e}(\square A) = 1$ sii para todo $w' \in W$, $v_{w'/e}(A) = 1$
$v_{w/e}(\Diamond A) = 1$ sii para todo $w' \in W$, $v_{w'/e}(A) = 1$
$v_{w/e}([K]A) = 1$ sii para todo $e' \in E$, $v_{w/e'}(A) = 1$
$v_{w/e}(\langle K\rangle A) = 1$ sii para algún $e' \in E$, $v_{w/e'}(A) = 1$

Dadas estas condiciones, podemos omitir las líneas sobre las relaciones en los árboles. Las reglas para operadores particulares introducen nuevos mundos/estados epistémicos y las de operadores universales se aplican a todos los mundos/estados epistémicos en la rama:[13]

13 Para la versión monomodal de estas reglas, véase a Priest, 2008: sec. 3.5.

$$\begin{array}{cccc}
\lozenge A, w_i / e_x & \Box A, w_i / e_x & \langle K \rangle A, w_i / e_x & [K] A, w_i / e_x \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
A, w_j / e_x & A, w_k / e_x & A, w_i / e_y & A, w_i / e_z
\end{array}$$

En las reglas de $\lozenge$ y $\langle K \rangle$, j y y son números nuevos de mundos/estados epistémicos en la rama; en las reglas de $\Box$ y $[K]$, k y z son cualquier número de mundo/estado epistémico en la rama respectivamente (incluidos i y x).

Comprobar que (CK+) es válido por medio de árboles se deja al lector. A modo de ejemplo, desarrollaré el árbol de $S5/S5/KD$ para la equivalencia formada por las siguientes fórmulas:

(SH) $[K]\Box p \supset \Box[K] p$
(SHC) $\Box [K]p \supset [K] \Box p$

$$\begin{array}{ccc}
 & \Box[K]p \equiv [K]\Box p, w_0/e_0 & \\
\swarrow & & \searrow \\
\Box[K]p, w_0/e_0 & & [K]\Box p, w_0/e_0 \\
\neg[K]\Box p, w_0/e_0 & & \neg\Box[K]p, w_0/e_0 \\
\langle K \rangle \neg\Box p, w_0/e_0 & & \lozenge\neg[K]\Box p, w_0/e_0 \\
\neg\Box p, w_0/e_1 & & \neg\langle K \rangle p, w_1/e_0 \\
\lozenge\neg p, w_0/e_1 & & \langle K \rangle \neg p, w_1/e_0 \\
\neg p, w_1/e_1 & & \neg p, w_1/e_1 \\
[K]p, w_1/e_0 & & \Box p, w_0/e_0 \\
p, w_1/e_1 & & p, w_1/e_1 \\
\times & & \times
\end{array}$$

En una lógica alético-temporal, cuando una proposición es verdadera en todos los mundos y en todo momento, se dice que es *absolutamente necesaria*, $\Box[T]p$, a diferencia de cuando sólo es verdadera en un determinado momento, lo cual se llama *necesidad histórica*, $\Box p$ o $\langle T \rangle \Box p$. Por analogía, cuando un agente sabe una proposición en todas las circunstancias posibles, $\langle K \rangle \Box p$, puede decirse que tiene un *conocimiento absoluto* (con el perdón de Hegel), a diferencia del *conocimiento relativo*, que se da en una situación determinada, $[K]p$, $\lozenge[K]p$ o $\nabla [K]p$. (SH) afirma entonces que el conocimiento de algo necesario implica su conocimiento absoluto y (SHC) que el conocimiento absoluto de algo implica conocerlo como necesario.[14]

Teniendo (SH), es muy fácil demostrar axiomáticamente (CK+).

(I)	$[K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q)$	(CK)
(II)	$\Box([K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q))$	(N□) a (I)
(III)	$\Box[K](p \supset q) \supset \Box([K]p \supset [K]q)$	(MP) por (II) y (C□)
(IV)	$[K]\Box(p \supset q) \supset \Box[K](p \supset q)$	$[p/p \supset q]$ a (SH)
(V)	$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$	Tautología clásica
(VI)	$[K]\Box(p \supset q) \supset \Box([K]p \supset [K]q)$	(MP) por (III), (IV) y (V)
(VII)	$\Box([K]\Box(p \supset q) \supset \Box([K]p \supset [K]q))$	(R□) a (VI)
(VIII)	$[K](p \Rightarrow q) \Rightarrow ([K]p \Rightarrow [K]q)$	Definición de ⇒ a (VII)

Ahora bien, (CK) normalmente es llamando el *principio de cerradura para el conocimiento*, e indica que, si se conoce una implicación, el conocimiento del antecedente implica el del consecuente. Una de las críticas más reconocidas a (CK) fue elaborada por Fred Dretske (1970). Aun si se acepta que una proposición implica necesariamente a otra, que es (C□), esto no sucede con el conocimiento; *la implicación no es así de penetrante en estos casos*. La diferencia es clara en el siguiente ejemplo. Los axiomas y definiciones en *Los elementos* implican necesariamente a sus teoremas (y más); pero conocer las primeras páginas de *Los elementos* no significa saber *todo* lo que se sigue de los axiomas y definiciones según Euclides (y más). Dada la falla de (CK+), por la falla de (SH), las semánticas de $T/T/KD^*$ pueden hacer sustanciales las ideas de Dretske al mostrar que el principio falla

14 Para una introducción a la necesidad histórica, véase a Thomason, 2002: sec. 2; para literatura pertinente y un abordaje semántico, Rönnedal, 2020: secc. 1 y 3.2; y para una discusión sobre la interacción entre $\Box p$, $[T]p$ y $\Box[T]p$, Sánchez, 2022: sec. 3. Hasta donde he investigado, (SH) y (SHC) no figuran en la literatura, de ahí la referencia con mis apellidos, porque se plantean aquí, por primera vez, como una analogía con la equivalencia $\Box[T]p \equiv [T]\Box p$ en un sistema que llamo *MOT* cuando su base alética es *S*5. Desconozco si en la literatura sobre lógicas alético-temporales hay comentarios sobre dicha equivalencia. En todo caso, su comportamiento es similar al de las fórmulas Barcan en las lógicas de dominio constante. En el apéndice, puede encontrarse un esquema sobre algunas inferencias válidas en *S*5/*S*5.

cuando consideramos circunstancias a donde no llega la afirmación.[15] Comentarios análogos se aplican a (CB+) para lo doxástico.

Cuanto concierne a la cerradura alética, hay dos posibilidades. En tanto que $p \Rightarrow q =_{def} \Box(p \supset q)$, el principio de cerradura puede afirmarse como

(C□+) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$

Esta versión sólo es válida si acepta que R_e sea relativamente transitiva, *i. e.*, para todo w_i, w_j y w_k en todo e_x, si $w_i R_{e_x} w_j$ y $w_j R_{e_x} w_k$, entonces $w_i R_{e_x} w_k$. La regla de árbol para esta restricción es:

$$\begin{array}{c} w_i R_{e_x} w_j \\ w_j R_{e_x} w_k \\ \downarrow \\ w_i R_{e_x} w_k \end{array}$$

Si se insiste en que el principio de cerradura estricta cambie *todas las implicaciones materiales en* (C□) por estrictas, *i. e.*:

(C□++) $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$

Entonces el principio de cerradura estricta para la necesidad es válido incluso en *K*. En cualquiera de los dos casos, validar la cerradura alética no conlleva afirmar la cerradura estricta para el conocimiento o la creencia.

Si Dretske aceptara que ⇒ es mejor candidato que ⊃ para modelar al *si* de los lenguajes naturales, cualquier sistema con una base alética tanto o más fuerte que *K* (o *S*4, si se opta por (C□+)), cuya base epistémica sea más débil que *S*5, es idóneo para sus intuiciones; el principio de cerradura estricta es válido para la necesidad, pero no para el conocimiento. Lo mismo aplica *mutatis mutandis* respecto de la lógica doxástica con (CB+).

15 (SHC) falla si se piensa *à la Hume* desde la lógica alético-temporal, ya que él creía que siempre saber algo, $[T][K]p$, no implica saber que siempre sucede, $\neg[K][T]p$, uno puede concebir que en algún momento futuro la proposición a evaluar será falsa, $\langle F\rangle\langle K\rangle\neg p$.

*T/T/KD** CONDICIONAL

Las lógicas epistémicas y doxásticas suelen ser exigentes con lo que piden de los agentes racionales porque se restringen a ciertos ámbitos. El caso más evidente es la ausencia del tiempo, pues lo que antes se sabía o desconocía puede cambiar. En el análisis del conocimiento, sucede algo similar: las lógicas epistémico-doxásticas estándar sólo se evalúan en un mundo o situación posible, aunque podrían fallar en validar inferencias en otras situaciones, como en el caso del principio de cerradura para el conocimiento. Las semánticas de *T/T/KD** pueden usarse al plantear distintos escenarios para el conocimiento y extenderse a semánticas condicionales.

Empiezo con algunos asuntos técnicos, lo filosófico vendrá después. En aras de la simplicidad, la base alética será *S*5. Siguiendo las pautas dadas por Graham Priest, (2008: sec. 5.3), las semánticas condicionales de una lógica epistémico-doxástica pueden formularse de la siguiente manera: sea F el conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje, entonces el modelo es ahora una tupla $\langle W, E, \sim R/e, \{R_e(A): A \in F\}, \Psi K_W, \Psi B_W, v\rangle$. El cambio principal es que se añadí un conjunto de relaciones especiales para cada fórmula del lenguaje, todos los demás detalles permanecen igual. Llámese a este sistema *C/T/KD**. $wR_ew'(A)$ indica que "w' es idéntico *ceteris paribus* a w en e excepto porque A es verdadera". Para facilitar lo siguiente, podemos agregar un par de definiciones: 1) $f_{A_e}(w) = \{w': wR_ew'(A)\}$, el conjunto de mundos accesibles desde w vía A en e, siendo que $R_e(A)$ es interdefinible con $f_{A_e}(w)$ ($wR_ew'(A)$ sii $w' \in f_{A_e}(w)$); y 2) $[A]_e = \{w: v_{w/e}(A) = 1\}$, el conjunto de mundos en e en los que A es verdadera.

Añadimos al lenguaje dos condicionales con sus respectivas condiciones de verdad:

$$v_{w/e}(A \,\Box\!\!\rightarrow B) = 1 \text{ sii para todo } w' \in W \text{ tal que } wR_ew'(A),\ v_{w'/e}(B) = 1$$
$$v_{w/e}(A \,\Diamond\!\!\rightarrow B) = 1 \text{ sii para todo } w' \in W \text{ tal que } wR_ew'(A),\ v_{w'/e}(B) = 1$$

O bien

$$v_{w/e}(A \,\Box\!\!\rightarrow B) = 1 \text{ sii } f_{A_e}(w) \subseteq [B]_e$$
$$v_{w/e}(A \,\Diamond\!\!\rightarrow B) = 1 \text{ sii } f_{A_e}(w) \cap [B]_e \neq \emptyset$$

Ambos condicionales son interdefinibles (la prueba se deja como nota al pie):[16]

$A \;\square\!\!\rightarrow B$ sii $\neg(A \;\Diamond\!\!\rightarrow \neg B)$
$A \;\Diamond\!\!\rightarrow B$ sii $\neg(A \;\square\!\!\rightarrow \neg B)$

La validez se define por la preservación de la verdad igual que en $T/T/KD^*$.

Las reglas de árboles son las mismas que las de $T/T/KD^*$, aunque añadiendo las siguientes reglas para los condicionales contrafácticos:

$A \;\square\!\!\rightarrow B, w_i/e_x$	$A \;\Diamond\!\!\rightarrow B, w_i/e_x$	$\neg(A \;\square\!\!\rightarrow B), w_i/e_x$	$\neg(A \;\square\!\!\rightarrow B), w_i/e_x$
$w_i R_{e_x} w_j(A)$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$w_i R_{e_x} w_j(A)$	$A \;\Diamond\!\!\rightarrow \neg B, w_i/e_x$	$A \;\square\!\!\rightarrow \neg B, w_i/e_x$
$B, w_j/e_x$	$B, w_j/e_x$		

Las reglas de $\square\!\!\rightarrow$ se parecen a las de $\square$, sólo que ahora A debe ser la misma en ambos nodos; las de $\Diamond\!\!\rightarrow$ son como las de $\Diamond$. Las reglas para condicionales negados se explican por las equivalencias entre condicionales.

La idea de David Lewis (1973: 2) detrás de $\square\!\!\rightarrow$ y $\Diamond\!\!\rightarrow$ era dar cuenta de los condicionales subjuntivos, él los leía así:

$A \square\!\!\rightarrow B$: si A, *sería* (*would be*) el caso de que B
$A \Diamond\!\!\rightarrow B$: si A, *podría ser* (*might be*) el caso de que B

Las semánticas sugieren evaluar los condicionales en mundos idénticos al nuestro, $wR_e w'$, excepto por una afirmación, $wR_e w'(A)$. En las lógicas multimoda-

16 Si $A \;\square\!\!\rightarrow B, \neg(A \;\Diamond\!\!\rightarrow \neg B)$, por *reductio*: $f_{A_e}(w) \cap [\neg B]_e \neq \emptyset$, por tanto, para algún w', $w' \in f_{A_e}(w)$ y $w' \in [\neg B]_e$, *i. e.*, $w' \notin [B]_e$; pero $f_{A_e}(w) \subseteq [B]_e$, por tanto, $w' \in [B]_e$.

Si $\neg(A \;\Diamond\!\!\rightarrow \neg B)$, $A \;\square\!\!\rightarrow B$, por *reductio*: $f_{A_e}(w) \cap [\neg B]_e = \emptyset$ y, para algún w', $w' \in f_{A_e}(w)$ y $w' \notin [B]_e$, *i. e.*, $w' \in [\neg B]$, pero entonces $f_{A_e}(w) \cap [\neg B] \neq \emptyset$.

Si $A \;\Diamond\!\!\rightarrow B, \neg(A \;\square\!\!\rightarrow \neg B)$, por *reductio*: $f_{A_e}(w) \cap [B]_e \neq \emptyset$, por tanto, para algún w', $w' \in f_{A_e}(w)$ y $w' \in [B]_e$, pero, $f_{A_e}(w) \subseteq [\neg B]_e$, por tanto $w' \in [\neg B]_e$, *i. e.*, $w' \notin [B]_e$.

Finalmente, si $\neg(A \;\square\!\!\rightarrow \neg B)$, $A \;\Diamond\!\!\rightarrow B$: para algún w', $w' \in f_{A_e}(w)$ y $w' \notin [\neg B]$, *i. e.*, $w' \in [B]$, así pues $f_{A_e}(w) \cap [B]_e \neq \emptyset$.

les, podemos evaluar hechos de la otra lógica involucrada. En una lógica alético temporal, consideramos mundos con los mismos hechos temporales (Sánchez, 2022: sec. 4); en el caso de la lógica alético-epistémico-doxástica, evaluamos mundos con los mismos hechos objetivos, epistémicos y doxásticos.

Las lógicas condicionales suelen caracterizarse por la falla de tres inferencias:

(9) $p\Box\!\!\rightarrow q \nvDash (p\wedge r) \Box\!\!\rightarrow q$
(10) $p\Box\!\!\rightarrow q, q\Box\!\!\rightarrow r \nvDash p\Box\!\!\rightarrow r$
(11) $p\Box\!\!\rightarrow q \nvDash \neg q\Box\!\!\rightarrow \neg p$

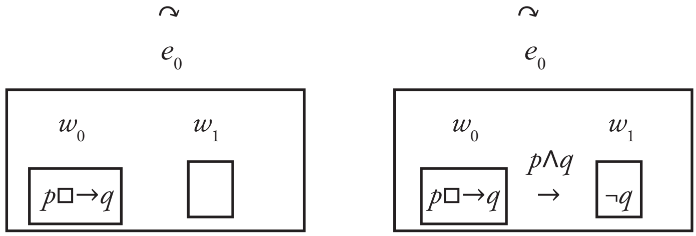
Éstas se conocen respectivamente como refuerzo del condicional, transitividad y transposición. Es fácil comprobar que las mismas inferencias son inválidas aún en contextos epistémicos:

(12) $[K](p\Box\!\!\rightarrow q) \nvDash [K]((p\wedge q) \Box\!\!\rightarrow q)$
(13) $[K](p\Box\!\!\rightarrow q), [K](q\Box\!\!\rightarrow r) \nvDash [K](p\Box\!\!\rightarrow r)$
(14) $[K](p\Box\!\!\rightarrow q) \nvDash [K](\neg q\Box\!\!\rightarrow \neg p)$

A modo de ejemplo, aquí está el árbol para (12):

$$
\begin{array}{c}
[K](p\Box\!\!\rightarrow q),\ w_0/e_0 \\
\neg[K]((p\wedge q)\Box\!\!\rightarrow q),\ w_0/e_0 \\
e_0\,\Psi K_{w_0}\,e_0 \\
p\Box\!\!\rightarrow q,\ w_0/e_0 \\
\langle \mathrm{K}\rangle\neg((p\wedge r)\Box\!\!\rightarrow q),\ w_0/e_0 \\
e_0\,\Psi K_{w_0}e_{1,}\ e_1\,\Psi K_{w_0}e_1 \\
\neg((p\wedge r)\ \Box\!\!\rightarrow q),\ w_0/e_1 \\
p\Box\!\!\rightarrow q,\ w_0/e_1 \\
(p\wedge r)\ \Diamond\!\!\rightarrow\neg q,\ w_0/e_1 \\
w_x R_{e_1} w_1(p\wedge r) \\
e_0\,\Psi K_{w_1}e_0,\ e_1\,\Psi K_{w_1}e_1 \\
\neg q,\ w_1/e_1 \\
e_1\,\Psi B_{w_1}e_2 \\
\vdots
\end{array}
$$

Para aplicar una regla a $p\Box\!\!\rightarrow q$, w_0/e_1 y cerrar el árbol en el par w_1/e_1, necesitaríamos $w_0R_{e_1}w_1(p)$, pero no está y no hay más reglas que aplicar salvo la serialidad de ΨB_W, lo cual sólo vuelve infinita a la rama. Los contramodelos se obtienen de forma similar a la anterior, aunque hay que distinguir cuando una relación lleva una fórmula, $w_iR_{e_x}w_j(A)$, de cuando no, $w_iR_{e_x}w_j$. Un contramodelo finito para (12) sería el siguiente ($^{A}\!\!\rightarrow$ quiere decir que el mundo es accesible por A y no se ilustra ninguna otra relación alética al ser $S5$ la base):



Algunos planteamientos epistemológicos requieren evaluarse en situaciones contrafácticas. Aquí hay uno con respecto al escepticismo. Un escéptico del mundo externo afirmaría que, si fuéramos un cerebro en una cubeta, p, sería el caso de que no lo sabríamos, $\neg[K]p$, así de perfecto es el engaño:

(15) $p\Box\!\!\rightarrow\neg[K]p$

La contraposición de (15) junto con la versión contrafáctica de (TK), $[K]$, implica que $[K]p\Box\!\!\rightarrow(p\wedge\neg q)$, pero si usamos $\Box\!\!\rightarrow$ en lugar de $\supset$ o $\Rightarrow$, podemos usar (15) sin involucrarnos con su transpuesta.[17] Una equivalencia de (TK) en su versión contrafáctica es:

(16) $p\Box\!\!\rightarrow\neg[K]\neg p$

Lo verdadero no puede ser conocido como falso. Si fueras un cerebro en una cubeta, no puedes saberlo como falso. De hecho, más adelante veremos que hay lógicas condicionales en las que (16) es una verdad lógica. (15) y (16) implican formalmente:

17 Sea $\rightarrow$ un condicional conexivo. La tesis de Boecio dice que $(p\rightarrow q)\rightarrow\neg(p\rightarrow\neg q)$. Así pues, (TKC), $[K]p\rightarrow p$, implica que $\neg([K]p\rightarrow\neg p)$, por lo que la transposición de (15), $\neg p\rightarrow\neg[K]\,p$, es incompatible con una verdad lógica normalmente aceptada. Ningún sistema presentado en este artículo valida la tesis de Boecio, y desarrollar uno, va más allá de los propósitos de este trabajo. Sobre la lógica conexiva, véase Wansing, 2022.

(17) $p \Box\!\!\rightarrow \backslash K/\neg p$

Si fueras un cerebro en una cubeta, sería el caso de que no sabrías si eres un cerebro en una cubeta. Aquí está el árbol.

$$
\begin{array}{c}
p \Box\!\!\rightarrow \neg[K]p,\ w/e_0 \\
p \Box\!\!\rightarrow \neg[K]\neg p,\ w_0/e_0 \\
\neg(p \Box\!\!\rightarrow \backslash K/p),\ w_0/e_0 \\
p \Diamond\!\!\rightarrow \neg/K\backslash p,\ w_0/e_0 \\
w_0 R_{e_0} w_1 (p) \\
\neg\backslash K/p,\ w_1/e_0 \\
/K\backslash p,\ w_1/e_0 \\
\neg[K]p,\ w_1/e_0 \\
\neg[K]\neg p,\ w_1/e_0 \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
[K]p,\ w_1/e_0 & [K]\neg p,\ w_1/e_0 \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Las ramas se cierran antes de desarrollar las reglas de operadores epistémicos, pero si se siguieran aplicando, el árbol se cerraría. La inferencia es válida porque es una instancia de la verdad lógica:

(18) $p \Box\!\!\rightarrow q,\ p \Box\!\!\rightarrow r \vDash p \Box\!\!\rightarrow (q \wedge r)$

Hay otros planteamientos que requieren un sistema condicional más fuerte. Siguiendo con los escépticos (*cfr*. Feldman, 2003: 112-113 y 123-124), uno podría afirmar:

(*) Si tuvieras una creencia falsa, no podrías tener conocimiento.

Esta afirmación se puede prestar a una ambigüedad. Por una parte, puede afirmarse que, si la creencia puede ser falsa, entonces no se tiene conocimiento.

(19) $\Diamond([B]p \wedge \neg q) \supset \neg[K]p$

Esto es inválido, pues saber *p* no entra en conflicto con, en otras circunstancias, equivocarse sobre tu creencia en *p*. Demostrarlo con un árbol y dar un contramodelo es fácil.[18] Por otra parte, uno puede plantear alternadamente:

18 Piénsese también desde la lógica temporal usando $\langle F \rangle$, puedes saber ahora *p* y en el futuro seguir creyendo *p*, aunque sea falso.

(20) $\neg(([B]\,p \wedge \neg q) \Diamond\!\!\rightarrow [K]p)$

Ésta no es válida en *C/T/KD**, aunque éste puede extenderse para obtener C^{+}*/T/KD** al añadir las siguientes dos restricciones:

- $f_{A_e}(w) \subseteq [A]_e$
- Si $w \in [A]_e$, entonces $w \in f_{A_e}(w)$

Las reglas de árboles correspondientes serían:

$$\begin{array}{c} w_i R_{e_x} w_j (A) \\ \downarrow \\ A, w_j / e_x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A, w_j / e_x & A, w_i / e_x \\ & w_i R_{e_x} w_i (A) \end{array}$$

La primera regla se explica por sí sola, los mundos accesibles desde w_i vía A son mundos donde A es verdadera. La segunda regla se aplica a cada A que sea el antecedente de un condicional y a todos los w_i y e_x en la rama; la restricción a antecedentes de condicionales se da porque es irrelevante para la validez cómo afecta a otras fórmulas, aunque en los contramodelos obtenidos, a partir de ramas abiertas, debe cuidarse que se satisfaga la restricción correspondiente.

Los árboles de *C/T/KD** y C^{+}*/T/KD** son correctos y completos respecto a sus propias semánticas.[19]

Aquí está el árbol que demuestra que en C^{+}*/T/KD** es válida (20):

$$\begin{array}{c}
\neg\neg(([B]\,p \wedge \neg p) \Diamond\!\!\rightarrow [K]p),\ w_0/e_0 \\
w_0 R_{e_0} w_0,\ e_0 \Psi K_{w_0} e_0 \\
([B]p \wedge \neg p) \Diamond\!\!\rightarrow [K]p,\ w_0/e_0 \\
e_0 \Psi K_{w_0} e_0 \\
w_0 R_{e_0} w_1 ([B]p \wedge \neg p),\ e_0 \Psi K_{w_1} e_0 \\
[K]p,\ w_1/e_0 \\
p,\ w_1/e_0 \\
[B]p \wedge \neg p,\ w_1/e_0 \\
[B]p,\ w_1/e_0 \\
\neg p,\ w_1/e_0 \\
\times
\end{array}$$

19 La prueba completa eventualmente aparecerá en el trabajo del que este artículo es un avance.

Ahora bien, que (20) sea válida no ayuda en mucho al escéptico, porque es equivalente a:

(21) $([B]p \wedge \neg p) \Box\!\!\rightarrow \neg[K]p$

Si tuvieras una creencia falsa, sería el caso de que no tienes conocimiento. Esto no es nada extraordinario; de hecho, lo aceptaría cualquiera. El escéptico está más comprometido con (19), pero ésta es inválida.

Un motivo para aceptar a $C^{+}/T/KD^{*}$ es que valida *modus ponens*:

(22) $A, A \Box\!\!\rightarrow B \vdash B$

Algo característico de $C^{+}/T/KD^{*}$ es que si el antecedente de $A \rightarrow B$ implica formalmente al consecuente, *i. e.*, $\vdash A \supset B$, por lo cual, $\vdash A \Rightarrow B$ por (N$\Box$), entonces $\vdash A \Box \rightarrow B$. Por esta razón, las inferencias (16), (20) y (21) son verdades lógicas. Un problema concomitante es que se cumplen un par de versiones de las paradojas de la implicación estricta:

(23) $\Box p \supset (q \Box\!\!\rightarrow p)$

(24) $\Box \neg p \supset (p \Box\!\!\rightarrow q)$

Esto puede ser insatisfactorio para ciertos planteamientos. Nótese que es válida la inferencia

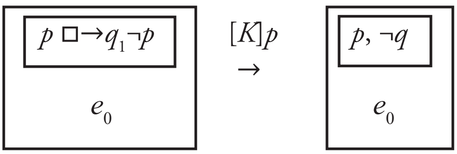
(25) $\neg p \Box\!\!\rightarrow \neg[K]p \vDash ([B]p \wedge \neg p) \Box\!\!\rightarrow \neg[K]p$

Ésta es claramente una instancia de (9), el refuerzo del condicional; pero se supone que debería fallar en formulaciones contrafácticas o subjuntivas.

Un comentario final prescindiendo de lo doxástico: aún si hacemos que $S5$ sea la base tanto para la lógica alética, como para la epistémica, y adoptamos las reglas de árboles de la sección 5, es inválido que

(26) $[K](p \Box\!\!\rightarrow q) \Box\!\!\rightarrow ([K]p \Box\!\!\rightarrow [K]q)$

Comprobar esto por medio de árboles es posible, pero laborioso; también difícil, porque el árbol puede volverse infinito. A prueba y error, encontré el siguiente contramodelo finito (sólo se indica $R_e(A)$ con su primera restricción, la segunda se omite en aras de la simplicidad, no es difícil comprobar que el modelo la satisface de todos modos):



Signos Filosóficos, vol. XXIV, núm. 48, julio-diciembre, 2022, 114-151, ISSN: 1665-1324

En w_0, en todos los estados epistémicos, sólo e_0, $p \Box\!\!\rightarrow q$ y $\neg p$ son verdaderos, por lo cual también lo son $[K](p \Box\!\!\rightarrow q)$ y $[K]\neg p$; también lo es que $\neg[K]p$, por lo cual w_0 no accede a sí mismo por $[K]p$. En w_1, en todos los estados epistémicos, sólo e_0, p y $\neg q$ son verdaderos, por lo cual $[K]p$ y $\neg[K]q$ también lo son, así como también lo es $\neg[K]q$. Ahora bien, $w_0 R_{e_0} w_1([K]p)$, pero en w_1 es falso que $[K]q$, por lo cual en w_0 es falso $[K]p \Box\!\!\rightarrow [K]q$. Finalmente, debido a que $[K](p \Box\!\!\rightarrow q)$ es verdadero en w_0, $w_0 R_{e_0} w_0([K](p \Box\!\!\rightarrow q))$, pero $[K]p \Box\!\!\rightarrow [K]q$ es falso en w_0, por tanto (26) es inválido.

Aun si alguien quisiera afirmar que (CK+) debe ser válido, (SH) incluido, el principio de cerradura falla en su versión contrafáctica.

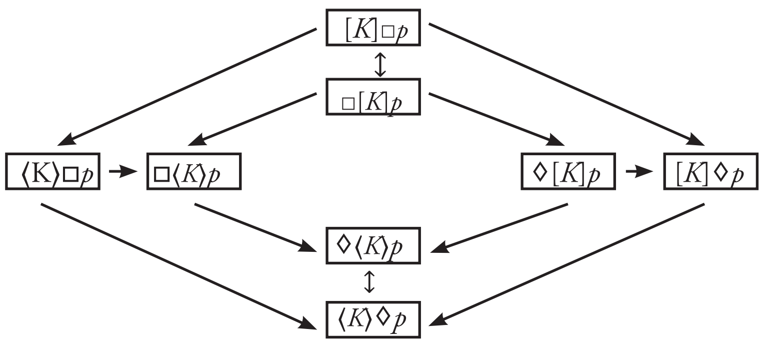
Apéndice

Cuando la base tanto para la lógica alética como para la epistémica es $S5$, las fórmulas (SH) y (SHC) se comportan como las fórmulas Barcan —(FB) y (FBC)— en un sistema de dominio constante.

(FB) $\forall x \Box A \supset \Box \forall x A$

(FBC) $\Box \forall x \supset \forall x \Box A$

Modificando el esquema que ofrecen William Kneale y Martha Kneale (1972: 571) para entender la interacción entre las modalidades *de re* y *de dicto* en las fórmulas Barcan, podemos obtener el siguiente esquema que indica algunas inferencias válidas en $S5/S5$.



Nótese que todas las fórmulas del diamante externo muestran actitudes epistémicas mientras que las del interior indican condiciones aléticas del conocimiento. Cualquiera de estos hechos puede comprobarse con los árboles que aquí se han desarrollado.

Siendo cuestionables (SH) y (SHC), todas las inferencias también lo son, aunque unas más que otras. En particular, encuentro problemático que $\Diamond[K]p \supset [K]\Diamond p$. Esto lleva demasiado lejos la idealización que normalmente se hace de los agentes epistémicos en estos aparatos formales, aunque es una especie de consuelo saber que por lo menos falla la fórmula conversa.

Bibliografía

Carnap, Rudolph (1956), *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*, Londres, University of Chicago Press.

Carnielli, Walter y Marcelo Esteban Coniglio (2020), "Combining logics", en Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [https://plato.stanford.edu/entries/logic-combining/], consultado: 2 de junio de 2021.

Costa-Leite, Alexandre (2016), "Interplays of knowledge and non-contingency", *Logic and Logical Philosophy*, vol. 25, núm. 4, pp. 521-534.

Dretske, Fred (1970), "Epistemic operators", *Journal of Philosophy*, vol. 67, núm. 24, pp. 1007-1023.

Egan, Andy y Brian Weatherson (2011), *Epistemic Modality*, Oxford, Oxford University Press.

Feldman, Richard (2003), *Epistemology*, Nueva Jersey, Pearson Education.

Hughes, George Edward y Max J. Cresswell (1973), *Introducción a la lógica modal*, Madrid, Tecnos.

Ichikawa, Jonathan Jenkins y Matthias Steup (2018), "The analysis of knowledge", en Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [https://plato.stanford.edu/entries/knowledge-analysis/], consultado: 2 de junio de 2021.

Jarrett, Charles (1978), "The logical structure of Spinoza's 'Ethics', Part I", *Synthese*, vol. 37, núm. 3, pp. 15-65.

Kneale, William y Martha Kneale (1972), *El desarrollo de la lógica*, Madrid, Tecnos.

Lewis, Clarence Irving (1918), *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, University of California Press.

Lewis, David (1973), *Counterfactuals*, Nueva Jersey, Basil Blackwell.

Menzel, Christopher (2016), "Possible Worlds", en Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [https://plato.stanford.edu/entries/possible-worlds/], consultado: 2 de junio de 2021.

Miller, Jon A. (2001), "Spinoza's possibilities", *The Review of Metaphysics*, vol. 54, pp. 779-814.

Montgomery, Hugh y Richard Routley (1966), "Contingency and non-contingency bases for normal modal logics", *Logique et analyse*, vol. 9, núm. 36, pp. 318-328.

Newlands, Samuel (2018), "Spinoza's Modal Metaphysics", en Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [https://plato.stanford.edu/entries/spinoza-modal/], consultado: 2 de junio de 2021.

Pacuit, Eric (2017), *Neighborhood Semantics for Modal Logic*, Nueva York, Springer.

Papineau, David (2020), "Naturalism", en Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [https://plato.stanford.edu/entries/naturalism/], consultado: 2 de junio de 2021.

Pineda, Víctor Manuel (2009), *Horror vacui. Voluntad y deseo en el pensamiento de Spinoza*, México, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo/Secretaría de Difusión Cultural y Extensión Universitaria Plaza y Valdés.

Priest, Graham (2008), *An Introduction to non-Classical Logic: From if to is*, Cambridge, Cambridge University Press.

Read, Stephen (1994), *Thinking about Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic*, Oxford, Oxford University Press.

Rönnedal, Daniel (2021), "Quantified temporal alethic boulesic doxastic logic", *Logica Universalis*, vol. 15, núm. 1, pp. 1-65.

Sánchez Hernández, Juan Carlos (2022), "Tableaux for some modal tense logics Graham Priest's fashion", *Studia logica*, vol. 110, pp. 745-784 [https://doi.org/10.1007/s11225-021-09974-x].

Sánchez Hernández, Juan Carlos (2020), *De la necesidad a la contingencia. La modalidad según Spinoza*, tesis de licenciatura, México, Universidad Nacional Autónoma de México-Facultad de Estudios Superiores Acatlán.

Schmidt, Andreas (2009), "Substance monism and identity theory in Spinoza", en Olli Koistinen (ed.), *The Cambridge Companion to Spinoza's Ethics*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 79-98.

Scott, Dana (1970), "Advice on modal logic", en Karel Lambert (ed.), *Philosophical Problems in Logic. Some Recent Developments*, Ámsterdam, D. Reidel Publishing Company, pp. 143-173.

Sharples, Robert William (2009), *Estoicos, epicúreos y escépticos. Introducción a la filosofía helenística*, México, Universidad Nacional Autónoma de México-Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Spinoza, Baruj (2020), *Ética demostrada según el orden geométrico*, Madrid, Trotta.

Spinoza, Baruj (2014), *Tratado de la reforma del entendimiento. Principios de la filosofía de René Descartes. Pensamientos metafísicos*, Madrid, Alianza Editorial.

Spinoza, Baruj (1988), *Correspondencia*, Madrid, Alianza Editorial.

Thomason, Richmond H. (2002), "Combinations of tense and modality", en Dov M. Gabay y Franz Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 7, Heidelberg, Springer, pp. 205-234.

Wright, George Henrik von (1983), *Philosophical Papers of Georg Henrik von Wright*, vol. 3, Nueva Jersey, Basil Blackwell.

Wansing, Heinrich (2006), "Connexive logic", en Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [https://plato.stanford.edu/entries/logic-connexive/], consultado: 2 de mayo de 2022.

Zolin, Evgeni (1999), "Completeness and definability in the logic of non-contingency", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 40, núm. 4, pp. 533-547.

Juan Carlos Sánchez Hernández: Organizador y ponente de un coloquio sobre interdisciplina en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán en cuatro ocasiones. Finalista en la Olimpiada Internacional de Lógica en 2018 y 2019. Primera mención honorífica en modalidad a distancia. Áreas de interés: lógicas no clásicas, lógicas multimodales, lógica epistémica, epistemología, filosofía de la mente. Este artículo se presenta como un adelanto de la tesis de maestría *Árboles semánticos para algunas lógicas alético-epistémico-doxásticas* en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, asesorada por el doctor Max Fernández de Castro Tapia.